

ISBN 978-602-17541-8-4

PEMODELAN MATEMATIKA DALAM DINAMIKA POPULASI

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.

PENERBIT



DUA SATU PRESS

ISBN: 978-602-17541-8-4

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.

PEMODELAN MATEMATIKA
DALAM
DINAMIKA POPULASI

PENERBIT



DUA SATU PRESS

MODEL MATEMATIKA
DALAM
DINAMIKA POPULASI

PEMODELAN MATEMATIKA
DALAM
DINAMIKA POPULASI

ISBN : 978-602-17541-8-4

Jumlah Halaman : 269, xviii

Ukuran Buku : 14 Cm X 21 Cm

Penulis : Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.

Desain Cover : Ruslan

Layout : Ruslan

Diterbitkan Oleh : DUA SATU PRESS

Jl. Perintis Kemerdekaan 9 No. 5A Makassar

Sulawesi-Selatan

www.ds1.com

Dicetak Oleh : CM.23.COM

Cetakan Pertama Juni 2013

Hak cipta dilindungi undang-undang

All rights reserved

Hak Cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian
atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun, baik
secara elektronik maupun mekanis, termasuk
memfotokopi, merekam atau dengan sistem
penyimpanan lainnya, tanpa izin tertulis dari penerbit

Sanksi Pelanggaran
Pasal 72 UU Nomor 19 Tahun 2002
Tentang Hak Cipta

1. Barangsiapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 2 ayat (1) atau Pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp. 1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp. 5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).
2. Barangsiapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu Ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Kata Pengantar

Persembahan

*Dipersembahkan kepada keluarga saya,
Nur Rahmatullah, Salsa, Dhani, dan Saffa*

Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc.

PEMODELAN MATEMATIKA
DALAM
DINAMIKA POPULASI

Persembahan

*Dipersembahkan kepada keluarga saya,
Nur Rahmatullah, Salsa, Dhani, dan Saffa*

Kata Pengantar

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Ilahi Rabbi. Karena perkenan-Nya jualah, penulis dapat merampungkan buku ini.

Buku ini lahir atas dorongan penulis untuk menyediakan bahan bacaan bagi mahasiswa atau siapa saja yang berminat pada penerapan matematika dalam dinamika populasi. Selain itu, buku ini hadir sebagai suatu usaha untuk memperkaya literatur buku pemodelan matematika dalam bahasa Indonesia.

Buku ini tersusun dalam enam bab. Dimulai dengan pembahasan tentang pemodelan matematika, termasuk di dalamnya bagaimana mengkonstruksi suatu model matematika, menganalisis model, menyelesaikan model, dan memberikan interpretasi dari solusi model. Selanjutnya disajikan sistem dinamik dan kestabilan yang membahas konsep-konsep sistem dinamik dan metode yang digunakan dalam menganalisis kestabilan suatu sistem.

Buku ini memfokuskan pembahasannya pada dinamika populasi yang meliputi dinamika perubahan satu populasi dan interaksi dua populasi. Interaksi dua populasi meliputi model populasi mangsa dan pemangsa, model dua populasi saling bebas, dan model populasi yang berkompetisi. Model yang digunakan dalam perubahan dinamika populasi tersebut merupakan model deterministik yang dinyatakan dalam bentuk satu atau dua persamaan differensial biasa.

Dalam buku ini, dinamika populasi dihubungkan dengan persoalan manajemen sumber daya alam. Dengan mengingat

bahwa populasi, sebagai contoh populasi ikan, memberikan manfaat kepada manusia, maka populasi tersebut selanjutnya dieksploitasi. Dengan demikian dinamika populasi selain mencakup aspek ekologi juga mencakup aspek ekonomi.

Buku ini memberikan secara detail tentang proses pemodelan pada dinamika populasi dan memberikan penyelesaiannya secara analitik atau solusi pendekatan serta interpretasi dari hasil model kepada fenomena sebenarnya. Analisis yang dilakukan menyangkut aspek ekologi (biologi) dan aspek ekonomi dengan menggunakan metode matematika.

Analisis ditujukan untuk menjamin kewujudan suatu kondisi yang memungkinkan populasi dapat tetap wujud (*survive*) untuk jangka waktu yang panjang, baik itu dinamika populasi yang hanya melibatkan satu populasi maupun dinamika populasi yang melibatkan dua populasi dalam bentuk predasi ataupun kompetisi. Terkait dengan hal tersebut, kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan model yang positif menjadi suatu hal yang penting dalam model yang dibahas.

Dengan pertimbangan bahwa populasi memberikan manfaat pada manusia, maka populasi tersebut dieksploitasi. Dalam usaha eksploitasi populasi tersebut, tentunya terkait dengan biaya dan usaha eksploitasi dan dari usaha eksploitasi memberikan hasil tangkapan dan pendapatan. Dalam situasi ini, tentunya menjadi menarik untuk mendapatkan keuntungan maksimal dalam usaha eksploitasi stok (populasi).

Analisis dalam buku ini mencakup dua hal, yaitu (1) bertujuan untuk menjamin populasi yang dieksploitasi tetap akan wujud secara berkelanjutan (*sustainable*) dan (2) pada saat yang bersamaan populasi memberikan keuntungan maksimal. Selain dibahas keuntungan maksimal juga disajikan kebijakan optimal yang melibatkan nilai sekarang (*present value*) dari

fungsi keuntungan yang terkait dengan usaha eksploitasi untuk model populasi mangsa-pemangsa dan model kompetisi dua populasi.

Penulis berharap kehadiran buku ini dapat memberikan pencerahan kepada pembaca yang berkenaan dengan pemodelan matematika khususnya pemodelan dinamika populasi dan eksploitasi sumber daya alam yang terbarukan. Penulis menyadari bahwa pembahasan dalam buku ini tentulah belum lengkap dan komprehensif mengingat begitu kompleksnya masalah yang dibahas serta keterbatasan penulis. Untuk itu, penulis dengan tangan terbuka mengharapkan dan menerima koreksi serta masukan dari pembaca sebagai upaya penyempurnaan buku ini pada masa yang akan datang.

Akhirnya penulis menyampaikan terima kasih kepada keluarga saya yang telah menyerahkan sebahagian jatah waktunya demi rampungnya penulisan buku ini. Penulis juga menyampaikan terima kasih kepada semua mahasiswa yang pernah berinteraksi dengan penulis dalam perkuliahan Model Matematika, baik mahasiswa S1 maupun mahasiswa S2 yang banyak memberikan inspirasi kepada penulis dalam memperkaya materi pada buku ini.

Makassar, 20 Mei 2013

Syamsuddin Toaha

Email : syamsuddint@yahoo.com

Daftar Isi

Persembahan	v
Kata Pengantar	vii
Daftar Isi	x
Daftar Gambar	xiv
Daftar Tabel	xviii
Bab 1 Pemodelan Matematika	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Proses pemodelan matematika	2
1.3 Pemodelan dengan persamaan differensial	7
1.4 Model dinamika populasi	18
1.5 Soal latihan	23
Bab 2 Sistem Dinamik dan Kestabilan	25
2.1 Sistem dinamik	25
2.2 Titik keseimbangan dan kestabilan	27
2.3 Bidang fase	29
2.4 Sistem persamaan differensial linear orde satu koefisien konstan dimensi dua	30
2.4.1 Metode eliminasi	31
2.4.2 Metode sistem dengan teori matriks	34
2.5 Kestabilan titik keseimbangan sistem dimensi dua	42

2.6 Solusi kualitatif sistem persamaan differensial linear	45
2.7 Linearisasi sistem di sekitar titik keseimbangan	61
2.8 Uji kestabilan Hurwitz	66
2.9 Soal latihan	69
Bab 3 Model Pertumbuhan Satu Populasi	71
3.1 Pendahuluan	71
3.2 Model diskrit populasi tunggal	72
3.3 Model pertumbuhan eksponensial	75
3.4 Model eksponensial dengan laju pemanenan konstan	78
3.5 Model eksponensial dengan usaha pemanenan konstan	82
3.6 Model pertumbuhan bergantung pada kepadatan populasi	83
3.7 Model logistik dengan laju pemanenan konstan	94
3.8 Model logistik dengan usaha pemanenan konstan	110
3.9 Soal latihan	119
Bab 4 Model Dua Populasi Saling Bebas	121
4.1 Pendahuluan	121
4.2 Model dua populasi saling bebas	122
4.3 Model dua populasi saling bebas dengan laju pemanenan konstan	125
4.4 Model dua populasi saling bebas dengan usaha pemanenan konstan	132

4.5 Model dua populasi saling bebas dengan usaha pemanenan sama	139
4.6 Soal latihan	147
Bab 5 Model Populasi Mangsa Pemangsa	149
5.1 Pendahuluan	149
5.2 Model populasi satu mangsa – satu pemangsa	151
5.3 Model dengan usaha pemanenan konstan pada populasi pemangsa	160
5.4 Model mangsa – pemangsa dengan usaha pemanenan konstan dan sama	163
5.5 Model mangsa – pemangsa dengan usaha pemanenan konstan	167
5.5.1 Keseimbangan bionomik	168
5.5.2 Kebijakan pemanenan optimal	177
5.6 Model dengan laju pemanenan konstan pada populasi pemangsa	182
5.7 Model mangsa – pemangsa dengan laju pemanenan konstan	190
5.8 Soal latihan	196
Bab 6 Model Kompetisi Dua Populasi	199
6.1 Pendahuluan	199
6.2 Model kompetisi dua populasi	202
6.3 Model kompetisi dua populasi dengan usaha pemanenan konstan	217
6.3.1 Ekuilibrium bionomik	231
6.3.2 Kebijakan pemanenan optimal	235
6.4 Model kompetisi dua populasi dengan fungsi pemanenan bergantung pada waktu	240

6.4.1 Kebijakan pemanenan optimal	242
6.4.2 Pendekatan lintasan optimal	245
6.5. Soal latihan	252

Daftar Pustaka

Lampiran

Indeks

Daftar Gambar

1.1	Langkah-langkah pemodelan matematika	3
1.2	Plot $\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)$ versus t dan regresi linear	16
1.3	Plot data prediksi dan data sebenarnya	17
2.1	Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(x_1, x_2) = (0, 0)$	49
2.2	Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$	49
2.3	Titik keseimbangan $(0, 0)$ yang stabil dan merupakan suatu node	51
2.4	Titik keseimbangan $(0, 0)$ yang tidak stabil dan merupakan suatu node	51
2.5	Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(x_1, x_2) = (0, 0)$	53
2.6	Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$	53
2.7	Titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$ yang stabil dan merupakan node sejati	55
2.8	Titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$ yang tidak stabil dan merupakan node tidak sejati	56
2.9	Kasus $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$	60
2.10	Kasus $a_1 < 0$ dan $a_2 < 0$	60

2.11 Kasus $a_1 = 0$ dan $a_2 > 0$	61
3.1 Grafik kurva solusi dari model pertumbuhan eksponensial	78
3.2 Fungsi laju pertumbuhan $\frac{dx}{dt} = rx - H$	80
3.3 Beberapa kurva solusi untuk model (3.8)	81
3.4 Beberapa tipe kurva solusi model (3.10) untuk $E < r$, $E = r$, dan $E > r$	83
3.5 Hubungan antara laju pertumbuhan dengan kepadatan populasi	86
3.6 Grafik laju pertumbuhan logistik	86
3.7 Bidang fase untuk model logistik	89
3.8 Kurva solusi untuk model logistik	90
3.9 Plot data pertumbuhan <i>yeast</i> dan nilai prediksi model	93
3.10 Bidang fase model logistik dengan $H = \frac{rK}{4}$	95
3.11 Kurva solusi untuk model (3.17) dengan $H = \frac{rK}{4}$	98
3.12 Bidang fase model logistik dengan $0 < H < \frac{rK}{4}$	100
3.13 Kurva solusi untuk model (3.17) dengan $0 < H < \frac{rK}{4}$	103
3.14 Bidang fase model logistik dengan $H > \frac{rK}{4}$	107
3.15 Plot kurva solusi (3.30)	109
3.16 Bidang fase model logistik untuk $E = r$	111
3.17 Plot kurva solusi (3.35)	112
3.18 Bidang fase model logistik untuk $E > r$	115

3.19	Plot kurva solusi (3.39)	116
3.20	Grafik fungsi TR dan TC	117
4.1	Kurva solusi dan medan vektor untuk model (4.1) ...	125
4.2	Isoklin dan medan vektor untuk kasus 2	128
4.3	Isoklin dan medan vektor untuk kasus 3	129
4.4	Isoklin dan medan vektor untuk model (4.5)	134
4.5	Permukaan fungsi keuntungan	139
4.6	Keseimbangan bionomik untuk model (4.11) dimana kedua populasi tetap lestari	142
4.7	Keseimbangan bionomik untuk model (4.11) dimana populasi x akan tereliminasi	142
4.8	Kurva fungsi penerimaan dan fungsi biaya dimana populasi x lebih dominan	144
4.9	Kurva fungsi penerimaan dan fungsi biaya dimana populasi y lebih dominan	145
4.10	Kurva fungsi penerimaan dan fungsi biaya dimana populasi x dan y dominan	145
5.1	Kurva solusi di sekitar titik keseimbangan	155
5.2	Plot ukuran populasi mangsa terhadap waktu	158
5.3	Plot ukuran populasi pemangsa terhadap waktu	159
5.4	Plot ukuran populasi mangsa dan pemangsa	159
5.5	Daerah E dan E_1	176
5.6	Permukaan fungsi keuntungan	176
5.7	Trajektori di sekitar titik keseimbangan (13, 0,48)	184
5.8	Trajektori di sekitar titik keseimbangan (8,4289, 0,6628)	187
5.9	Trajektori di sekitar titik keseimbangan (10, 0,600)	188
5.10	Bidang fase dan titik keseimbangan model (5.24)	191

5.11 Bidang fase dan arah trajektori untuk model (5.24)	193
5.12 Trajektori di sekitar titik keseimbangan E_1 dan E_2	195
6.1 Medan arah kurva solusi di sekitar titik keseimbangan model (6.2)	206
6.2 Isoklin sederhana untuk model (6.2) dengan $er - as > 0$, $bs - \beta r > 0$, dan $be - \alpha\beta > 0$	207
6.3 Isoklin sederhana untuk model (6.2) dengan $er - as < 0$, $bs - \beta r < 0$, dan $be - \alpha\beta < 0$	208
6.4 Isoklin sederhana untuk model (6.2) dengan $er - as < 0$, $bs - \beta r > 0$, dan $be - \alpha\beta > 0$	208
6.5 Isoklin sederhana untuk model (6.2) dengan $er - as > 0$, $bs - \beta r < 0$, dan $be - \alpha\beta > 0$	209
6.6 Medan vektor dan beberapa trajektori di sekitar titik keseimbangan C yang stabil	213
6.7 Medan vektor dan beberapa trajektori di sekitar titik keseimbangan C yang tidak stabil	215
6.8 Daerah R_s dimana titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik	223
6.9 Daerah R_s dimana titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik	224
6.10 Daerah R_s dimana titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik	226
6.11 Kurva permukaan Y	230
6.12 Permukaan fungsi $R_s(x, y)$	249
6.13 Posisi titik optimal pada $R_s(x, y)$	250
6.14 Sketsa arah lintasan optimal	251

Daftar Tabel

1.1	Data rata-rata populasi RRC	10
1.2	Data rata-rata populasi RRC dan nilai prediksi	11
1.3	Data prediksi penduduk RRC	15
2.1	Jenis-jenis akar untuk dua persamaan	43
2.2	Jenis-jenis akar dan kestabilan	44
2.3	Sifat-sifat kestabilan pada sistem linear dan nonlinear	64
3.1	Data pertumbuhan <i>yeast</i>	91
5.1	Data populasi <i>hare</i> dan <i>lynx</i> dari tahun 1900-1920	157

Bab 1

Pemodelan Matematika

1.1 Pendahuluan

Matematika adalah studi tentang besaran, struktur, ruang, dan perubahan. Melalui penggunaan penalaran logika dan abstraksi, matematika berkembang dari pencacahan, pengukuran, dan pengkajian sistematis terhadap bangun dan perubahan benda-benda fisis dan nonfisis. Matematika saat ini digunakan secara luas dalam berbagai bidang sebagai suatu alat yang penting, termasuk pada bidang ilmu alamiah, teknik, kedokteran, sosial, ekonomi, psikologi, pertanian, perikanan, dan bidang-bidang lainnya.

Matematika terapan sebagai cabang matematika yang melingkupi penerapan matematika pada bidang-bidang lainnya, termasuk pada pengembangan matematika itu sendiri, telah mengilhami dan membuat penggunaan temuan-temuan baru matematika baru seperti lahirnya statistika, teori permainan, riset operasi, dan lain-lain.

Pemodelan matematika dapat dinyatakan sebagai suatu konstruksi matematis yang didesain untuk memahami suatu fenomena atau sistem yang terjadi dalam kehidupan kita. Pemodelan matematika dapat berupa suatu grafik, simbol-

simbol matematika, simulasi, ataupun eksperimen. Pemodelan matematika yang merupakan tiruan dari suatu fenomena nyata merupakan hasil dari suatu proses yang tidak lepas dari asumsi-asumsi dan penyederhanaan.

Model matematika dapat digunakan untuk menjelaskan perilaku fenomena alam yang terjadi, dapat digunakan untuk memprediksi perilaku sistem untuk suatu jangka waktu tertentu, dan dapat juga digunakan untuk mengambil suatu kebijakan. Sebagai contoh, fenomena pertumbuhan populasi manusia pada suatu negara dapat dijelaskan melalui suatu model matematika, dan hasil analisis dari model tersebut dapat digunakan untuk mengambil kebijakan dalam mengatur laju kelahiran, memperkirakan kebutuhan pangan, dan hal-hal yang terkait dengan kebutuhan populasi manusia pada negara tersebut.

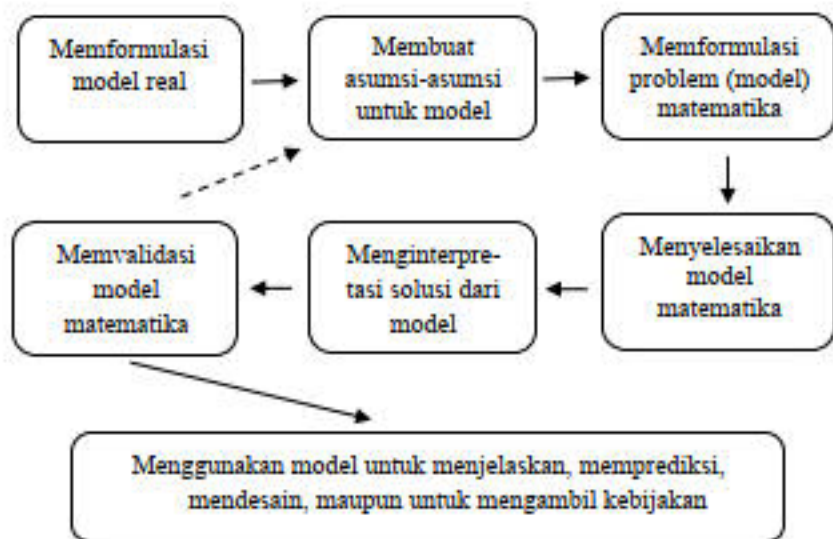
Pemodelan matematika pada bidang biologi, ekologi, epidemiologi, dan kedokteran mendapat banyak tantangan dan hambatan. Salah satu penyebabnya adalah faktor-faktor yang memengaruhi pertumbuhan hewan, tumbuhan, sel, virus, dan sebagainya sangat kompleks. Dengan demikian terdapat kesulitan dalam menentukan faktor-faktor dominan yang akan dipertimbangkan dalam membangun model. Di samping itu, kendala lain adalah ketersediaan data yang mendukung untuk keperluan simulasi dan validasi model pada umumnya tidak mudah diperoleh.

1.2 Proses pemodelan matematika

Para saintis berusaha untuk membuat suatu pemahaman pada semua jenis fenomena. Penjelasan suatu fenomena sering

kali dapat diberikan melalui pendekatan secara matematis. Penjelasan secara kualitatif suatu fenomena sangat mungkin sejalan dengan hasil yang diperoleh dari suatu eksperimen. Ketika teori dan eksperimen secara kualitatif bersesuaian dengan suatu fenomena, maka kita dapat lebih percaya mengenai kevalidan teori tersebut. Dalam masalah seperti ini, matematika menjadi bagian integral dari metode sains dalam memberikan suatu pemahaman.

Suatu fenomena alam yang akan dimodelkan ke dalam model matematika perlu diidentifikasi dengan jelas tentang masalah yang terjadi atau hal yang akan dijelaskan pada fenomena tersebut. Hal ini terkait dengan tahapan yang dilakukan dalam pemodelan. Tahapan-tahapan utama dalam memodelkan masalah nyata diberikan pada Gambar 1.1 berikut (Burghes dan Borrie, 1981).



Gambar 1.1 Langkah-langkah pemodelan matematika

Fenomena nyata yang akan dimodelkan perlu dicermati dengan teliti. Persoalan yang akan dijelaskan dari fenomena tersebut atau hal-hal yang menarik untuk dijelaskan dari fenomena yang terjadi harus dicermati dengan baik. Beberapa pertanyaan yang terkait dengan fenomena tersebut perlu dibuat untuk membantu mengidentifikasi persoalan. Problem atau hal-hal yang menjadi perhatian diformulasikan dalam bentuk kalimat. Data dengan jumlah yang cukup serta relevan dengan masalah yang akan dijelaskan diperlukan untuk membantu mengidentifikasi masalah.

Setelah persoalan atau hal-hal yang akan dijelaskan sudah teridentifikasi dengan baik, maka problem-problem nyata ditransformasi ke dalam suatu masalah matematika dengan membuat beberapa asumsi yang realistis dan beberapa penyederhanaan atau idealisasi. Faktor-faktor yang penting harus diidentifikasi dan hubungan antar variabel dinyatakan dalam suatu postulat.

Dengan asumsi yang diberikan, problem yang telah dirumuskan dapat dinyatakan ke dalam bahasa matematika dengan terlebih dahulu memberikan beberapa pernyataan atau definisi faktor-faktor yang memengaruhi dan faktor-faktor yang bergantung kepada faktor-faktor yang lainnya. Rumusan yang terjadi biasanya dinyatakan dalam bentuk koleksi persamaan atau pertidaksamaan. Dengan demikian problem nyata telah ditransformasi ke dalam problem abstrak secara matematis. Problem abstrak yang telah dinyatakan dalam simbol matematika disebut sebagai model matematika.

Model matematika yang terhasil perlu diselesaikan untuk mengetahui hubungan fungsional antara variabel-variabel yang membentuk model. Untuk keperluan ini, beberapa estimasi perlu

dilakukan, termasuk mengestimasi nilai-nilai parameter pada model. Penyelesaian dari model matematika diperoleh dengan menggunakan metode matematika yang sesuai. Metode yang digunakan dapat menghasilkan penyelesaian secara analitik, penyelesaian pendekatan, atau penyelesaian secara numerik. Penyelesaian yang diperoleh dapat bersifat global atau mungkin hanya bersifat lokal. Penyelesaian yang bersifat lokal hanya memberikan penyelesaian pada suatu domain tertentu yang lebih spesifik yang menjadi fokus perhatian.

Model matematika yang terjadi harus divalidasi untuk mengecek apakah solusi yang diperoleh dari model matematika sesuai dengan observasi dari situasi real yang sebenarnya. Jika terdapat korelasi yang baik, maka model tersebut dapat digunakan untuk menjelaskan fenomena yang dimodelkan. Sebaliknya, jika korelasi antara hasil teori dan observasi tidak cukup bagus, maka kita harus merevisi kembali asumsi-asumsi yang telah dibuat dan berusaha untuk membuat asumsi yang lebih realistis serta memodifikasi model yang telah ada menjadi model yang lebih kompleks (May, 1974; Haberman, 1998).

Model yang terhasil dapat digunakan untuk menjelaskan data observasi, atau membuat beberapa prediksi, atau mengambil suatu keputusan (Burghes dan Borrie, 1982). Solusi analitik ataupun solusi pendekatan yang diperoleh dari problem matematika itu digunakan untuk memberikan interpretasi atau penjelasan pada problem yang sebenarnya. Solusi ini juga dapat digunakan untuk memprediksi perilaku sistem yang akan terjadi. Dalam beberapa kasus solusi dari model dapat digunakan untuk membuat keputusan dan selanjutnya dapat dijadikan suatu kebijakan atau perencanaan.

Mengingat kompleksnya masalah yang ada dalam suatu fenomena alam, dengan itu sangat mungkin eksperimen yang dilakukan tidak dapat mencakup semua aspek yang diinginkan. Untuk itu, mungkin hanya beberapa faktor yang lebih dominan yang menjadi perhatian. Pemodelan matematika berhadapan dengan tantangan dalam menentukan faktor-faktor yang paling berpengaruh dalam fenomena tersebut. Faktor-faktor seperti inilah yang selanjutnya dipertimbangkan dalam mengkonstruksi dan merumuskan model matematikanya.

Proses dalam pemodelan matematika tidak pernah berhenti. Begitu eksperimen atau observasi yang lain atau yang terbaru diperoleh, model matematika senantiasa direvisi dan dikembangkan. Revisi dan pengembangan model bukan hanya terjadi pada modelnya, tetapi juga secara kontinu dituntut untuk mengembangkan metode dan proses komputasi yang lebih akurat dalam upaya untuk mendapatkan solusi yang lebih baik.

Kita boleh saja tidak puas dengan hasil yang diperoleh dari pemodelan matematika, karena sangat mungkin belum bisa menjelaskan dengan sangat baik pada fenomena yang dimodelkan. Hal ini mungkin disebabkan oleh kompleksnya masalah yang dimodelkan, asumsi-asumsi yang digunakan belum bisa mencakup semua aspek, metode analisis yang belum mampu menjelaskan secara menyeluruh, metode komputasi yang belum akurat dan berbagai faktor lainnya. Walaupun begitu, model yang terhasil serta interpretasi yang diberikan dapat memberikan gambaran secara kualitatif meskipun mungkin hanya bersifat lokal terhadap fenomena yang sebenarnya, atau minimal dapat menjadi referensi untuk membuat model yang lebih baik (Boyce dan DiPrima, 1992; Barnes dan Fulford, 2002).

Model matematika yang terhasil mungkin berupa suatu persamaan atau pertidaksamaan. Persamaan atau pertidaksamaan yang terjadi mungkin melibatkan satu variabel bebas atau lebih. Jika variabel-variabel yang ditinjau bersifat diskrit maka model yang terhasil adalah suatu model diskrit yang dapat berupa suatu persamaan differensi. Jika variabel-variabel yang ditinjau bersifat kontinu maka model yang terhasil merupakan model kontinu yang dapat berupa suatu persamaan differensial. Persamaan differensial yang terhasil mungkin berupa satu atau beberapa persamaan differensial biasa. Beberapa model juga mungkin berupa suatu persamaan differensial parsial. Model yang terhasil mungkin merupakan model deterministik atau model stokastik.

1.3 Pemodelan dengan persamaan differensial

Kita sering melihat suatu fenomena yang berhubungan dengan laju perubahan pada suatu kuantitas terhadap satu atau beberapa kuantitas yang lain yang memengaruhinya. Dengan memperhatikan perubahan-perubahan kuantitas tersebut, biasanya kita berusaha untuk mendapatkan informasi mengenai hubungan fungsional antara kuantitas-kuantitas tersebut. Sebagai contoh, jika P menyatakan jumlah manusia dalam suatu populasi yang besar pada suatu waktu t , maka sangat beralasan untuk menyatakan bahwa laju perubahan populasi terhadap waktu bergantung kepada ukuran populasi pada saat sekarang.

Problem nyata pada perubahan populasi adalah bagaimana menjelaskan mekanisme pada perubahan populasi dan bagaimana mengkonstruksi suatu model yang dapat menjelaskan perubahan populasi tersebut untuk memprediksi

ukuran populasi pada masa yang akan datang. Untuk mengkonstruksi model perubahan populasi, kita mengadopsi ide dari ekonom Inggris, Thomas Robert Malthus, dalam artikelnya yang berjudul "*An Essay on the Principle of Population*" yang dipublikasikan pada 1798.

Dengan pertimbangan masalah-masalah ekologi, ekonomi, atau alasan-alasan lain, perubahan yang terjadi menjadi menarik untuk menentukan hubungan antara ukuran populasi P dan waktu t untuk membuat prediksi ukuran populasi P pada waktu yang akan datang. Jika ukuran populasi pada saat sekarang dinyatakan sebagai $P(t)$ dan ukuran populasi pada saat $t + \Delta t$ adalah $P(t + \Delta t)$, maka perubahan populasi ΔP selama periode waktu Δt diberikan oleh

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t). \quad (1.1)$$

Ada banyak faktor yang memengaruhi pertumbuhan populasi dalam suatu wilayah, antara lain adalah faktor emigrasi, imigrasi, umur, gender, kelahiran, dan kematian. Misalkan kita hanya mempertimbangkan prinsip proporsionalitas, yaitu pertumbuhan populasi proporsional dengan ukuran populasi. Jika diasumsikan bahwa jumlah kelahiran dan kematian proporsional kepada ukuran populasi dan interval waktu tertentu Δt , yaitu jumlah kelahiran = $bP\Delta t$ dan jumlah kematian = $dP\Delta t$, dengan b dan d merupakan konstanta nonnegatif. Dengan demikian perubahan populasi, yaitu ΔP , dalam interval waktu Δt diberikan oleh

$$\Delta P = bP\Delta t - dP\Delta t = (b - d)P\Delta t = kP\Delta t, \quad (1.2)$$

dimana $k = b - d$. Rata-rata laju perubahan populasi selama waktu Δt diberikan oleh

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = kP. \quad (1.3)$$

Dengan mengambil Δt cukup kecil atau mendekati nol dan dengan menggunakan definisi turunan (*derivative*) diperoleh suatu persamaan differensial

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = kP \quad (1.4)$$

yang menyatakan laju perubahan sesaat populasi terhadap waktu proporsional dengan ukuran populasi pada waktu t . Model (1.4) dikenal sebagai model pertumbuhan populasi Malthus.

Persamaan differensial (1.4) dengan nilai awal populasi $P(t_0) = P_0 > 0$ mempunyai solusi $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$. Prediksi perilaku ukuran populasi bergantung kepada nilai konstanta k . Jika $k > 0$ maka populasi tumbuh secara eksponensial tanpa batas. Jika $k < 0$ maka populasi meluruh secara eksponensial dan ukuran populasi akan menuju nol. Jika $k = 0$ maka ukuran populasi tidak mengalami perubahan dan dengan demikian ukurannya sama dengan populasi awal, yaitu $P(t) = P_0$ untuk setiap waktu t .

Untuk mengetahui apakah model (1.4) dapat digunakan untuk memprediksi ukuran populasi, mari kita menggunakan data rata-rata jumlah penduduk negara Republik Rakyat Cina (www.en.wikipedia.org, 2013). Data selengkapnya diberikan pada Lampiran 1.

Tabel 1.1 Data rata-rata populasi RRC

Tahun	Rata-rata Populasi
1950	546.815.000
1951	557.480.000
1952	568.910.000
1953	581.390.000
1954	595.310.000

Untuk memprediksi ukuran populasi total di RRC pada waktu selanjutnya, kita usulkan menggunakan model Malthus, model (1.4). Dalam hal ini, waktu $t = 0$ bersesuaian dengan 1950. Dengan itu kita mengambil $P(0) = 546.815.000$. Dari Tabel 1.1 diketahui bahwa interval waktu yang digunakan adalah $\Delta t = 1$. Dengan menggunakan solusi model (1.4), yaitu $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$, diperoleh nilai pendekatan untuk $P(1) = 557.480.000 = 546.815.000 \times e^k$. Dari perbandingan nilai $P(1)$ yang sebenarnya dan nilai prediksinya, maka nilai parameter k dapat diestimasi dan diperoleh nilai estimasi $k = \ln\left(\frac{557.480}{546.815}\right) \approx 0.01931609$. Disini, estimasi nilai k diperoleh dengan menggunakan nilai $P(0)$ dan $P(1)$. Estimasi nilai k tentunya dapat diperoleh dengan menggunakan data yang lainnya.

Dengan menggunakan nilai awal populasi $P(0) = 546.815.000$ dan $k = 0.01931609$, maka model (1.4) dapat digunakan untuk memprediksi nilai $P(2)$ yaitu ukuran

populasi pada 1952, $P(3)$, $P(4)$, dan seterusnya. Nilai prediksi untuk beberapa tahun diberikan pada Tabel 1.2.

Tabel 1.2 Data rata-rata populasi RRC dan nilai prediksi

Tahun	Rata-rata Populasi	Nilai Prediksi
1951	557.480.000	557.479.999
1952	568.910.000	568.353.007
1953	581.390.000	579.438.080
1954	595.310.000	590.739.355
1955	608.655.000	602.261.048
1956	621.465.000	614.007.459
1957	637.405.000	625.982.970
1958	653.235.000	638.192.050
1959	666.005.000	650.639.253
1960	667.070.000	663.329.226
1961	660.330.000	676.266.701
1962	665.770.000	689.456.507
1963	682.335.000	702.903.565
1964	698.355.000	716.612.893
...
2000	1.262.645.000	1.436.428.404
2001	1.271.850.000	1.464.444.292
2002	1.280.400.000	1.493.006.598
2003	1.288.400.000	1.522.125.978

Hasil prediksi ukuran populasi yang diperoleh dengan menggunakan model (1.4) nampaknya cukup sesuai untuk beberapa tahun di awal. Hal ini ditandai dengan selisih antara nilai prediksi dan nilai sebenarnya masih relatif rendah. Tetapi

pada 2000 sampai dengan 2003, sebagai contoh, nilai prediksi dan nilai sebenarnya selisihnya sudah cukup besar. Pada kondisi tersebut, model tidak dapat lagi digunakan untuk memprediksi jumlah populasi untuk waktu yang lebih besar.

Karena model Malthus tidak sesuai lagi digunakan untuk memprediksi ukuran populasi untuk waktu yang lama, maka asumsi yang dipertimbangkan pada model (1.4) harus ditinjau kembali. Ternyata populasi tidak selalu dapat bertumbuh secara eksponensial tanpa batas. Dengan demikian ternyata faktor kelahiran dan kematian yang ditinjau pada model Malthus yang diasumsikan bernilai konstan perlu ditinjau kembali. Dari fakta diketahui bahwa ketika ukuran populasi sudah cukup besar, laju pertumbuhan menjadi terbatas karena keterbatasan makanan, penduduk sudah padat, ketidakcukupan sumber daya, dan faktor lingkungan lainnya.

Pada 1837 Pierre-Francois Verhulst, seorang ahli matematika biologi Belanda, mengusulkan untuk memodifikasi model Malthus dengan mempertimbangkan faktor kepadatan populasi. Dengan itu diasumsikan bahwa populasi tidak akan dapat bertumbuh tanpa batas, yaitu terdapat suatu jumlah populasi maksimal, katakanlah K , yang dapat ditampung dengan baik secara berkelanjutan oleh lingkungannya.

Konstanta k pada model (1.4) yang menyatakan laju pertumbuhan populasi ternyata tidak selamanya konstan, karena ketika populasi sudah padat maka laju pertumbuhan populasi menjadi berkurang. Dengan demikian dapat diasumsikan bahwa laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi pada saat t . Ketika populasi membesar dan mendekati ukuran populasi maksimal, maka laju k menurun. Salah satu bentuk fungsi sederhana yang dapat digunakan untuk mengukur laju

pertumbuhan populasi adalah $k = r(K - P)$ dengan r suatu konstanta positif.

Dengan mengganti $k = r(K - P)$ pada model (1.4) diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = rP(K - P). \quad (1.5)$$

Model (1.5) dikenal sebagai model Verhulst dan juga disebut sebagai model pertumbuhan logistik. Model (1.5) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dP}{P(K - P)} = r dt. \quad (1.6)$$

Dengan mengintegrasikan kedua ruas pada persamaan (1.6) diperoleh

$$\ln\left(\frac{P}{K - P}\right) = rKt + C, \quad (1.7)$$

dimana C menyatakan konstanta integrasi. Dengan melibatkan syarat awal $P_0 = P(t_0)$ untuk $t = t_0$, maka diperoleh solusi dari model (1.5)

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rK(t-t_0)}}. \quad (1.8)$$

Dari solusi ini diketahui bahwa jika waktu t membesar (dalam jangka waktu yang lama), maka ukuran populasi akan menuju ke ukuran populasi maksimal.

Untuk mengetahui pertumbuhan maksimal populasi, maka model (1.5) didiferensialkan lagi terhadap waktu t , diperoleh

$$\frac{d^2P}{dt^2} = rK \frac{dP}{dt} - 2rP \frac{dP}{dt} = r \frac{dP}{dt} (K - 2P),$$

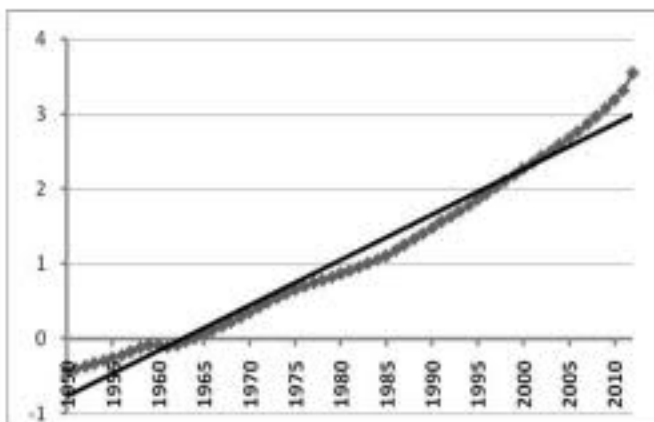
yang memberikan $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ ketika $P = \frac{K}{2}$. Untuk $P < \frac{K}{2}$ maka $\frac{dP}{dt}$ merupakan fungsi naik dan untuk $P > \frac{K}{2}$ maka $\frac{dP}{dt}$ merupakan fungsi turun. Hal ini bermakna bahwa nilai $\frac{dP}{dt}$ maksimal terjadi pada $P = \frac{K}{2}$ dan selanjutnya $\frac{dP}{dt}$ mulai berkurang dan akan menuju nol. Nilai $\frac{dP}{dt}$ maksimal yang terjadi pada $P = \frac{K}{2}$ dapat digunakan untuk mengestimasi nilai K .

Sekarang, mari kita gunakan data populasi RRC untuk menguji kesesuaian model dengan data real. Dari persamaan (1.7) diperoleh hubungan linear antara $\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)$ dan t . Untuk memplot $\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)$ dan t , maka nilai K perlu diestimasi. Untuk keperluan itu, kita dapat menggunakan informasi dari data prediksi jumlah penduduk RRC yang disediakan oleh *United Nation* pada 2010 (www.en.wikipedia.org, 2013) seperti pada Tabel 1.3.

Tabel 1.3 Data prediksi penduduk RRC

Tahun	Nilai Prediksi
2020	1.387.792.000
2030	1.393.076.000
2040	1.360.906.000
2050	1.295.604.000
2060	1.211.538.000
2070	1.125.903.000
2080	1.048.132.000
2090	984.547.000
2100	941.042.000

Dari Tabel 1.3 diperoleh informasi bahwa jumlah populasi maksimal diprediksi tercapai pada nilai 1.393.076.000 jiwa. Dengan nilai prediksi tersebut, cukup beralasan untuk mengambil nilai estimasi kapasitas batas maksimal untuk populasi RRC sebesar $K=1.393.000.000$ jiwa. Dengan nilai K tersebut diperoleh plot antara $\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)$ dan waktu t seperti pada Gambar 1.2. Transformasi data tersebut dilakukan untuk mendapatkan hubungan linear antara $\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)$ dan waktu t . Nilai untuk $\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)$ juga diberikan pada Lampiran 1.



Gambar 1.2 Plot $\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)$ versus t dan regresi linear

Dari hasil regresi linear antara data $\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)$ dan data waktu t , lihat persamaan (1.7), diperoleh kemiringan $rK = 0,060$, nilai $C = -117,770$, dan koefisien determinasi $R^2 = 0,973$. Dari nilai $rK = 0,060$ dan nilai $K = 1.393.000.000$ diperoleh nilai $r = 4,30725 \times 10^{-11}$.

Misalkan t_0 menyatakan waktu pada saat ukuran populasi $P(t)$ mencapai $\frac{K}{2}$, yaitu $P(t_0) = \frac{K}{2}$. Dengan nilai tersebut, dari solusi (1.8) diperoleh $t = t_0 + \frac{1}{rK} \ln\left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)$.

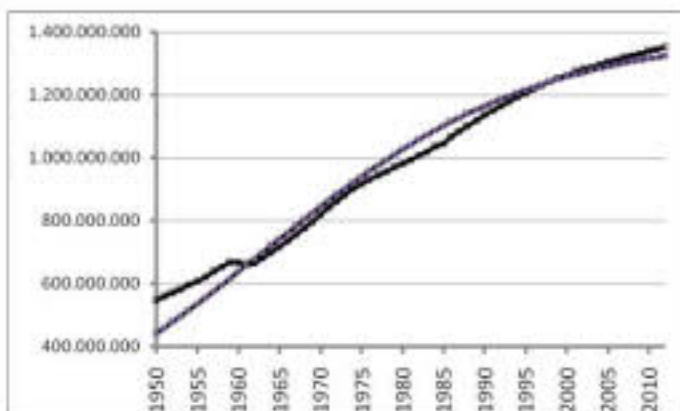
Dengan mensubstitusi nilai $t_0 = t_s - \frac{1}{rK} \ln\left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)$ ke persamaan (1.8) diperoleh solusi dalam bentuk

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-rK(t-t_s)}} \quad (1.9)$$

Nilai t_s juga dapat diestimasi dari regresi linear yang diperoleh, yaitu $t_s = \frac{-C}{rK}$. Dengan menggunakan $t_s = \frac{-C}{rK}$ diperoleh $t_s = \frac{117,770}{0,060} = 1962,8333$. Dengan estimasi nilai-nilai parameter tersebut diperoleh solusi

$$P(t) = \frac{1.393.000.000}{1 + e^{-0,060(t-1962,8333)}} \quad (1.10)$$

Plot kurva solusi yang menyatakan nilai prediksi untuk populasi dan plot data sebenarnya diberikan pada Gambar 1.3.



Gambar 1.3 Plot data prediksi dan data sebenarnya

Dengan menggunakan persamaan (1.10), diperoleh nilai prediksi populasi penduduk RRC seperti diberikan pada Lampiran 1. Dari Gambar 1.3 diketahui bahwa nilai prediksi populasi RRC bersesuaian cukup baik dengan data sebenarnya.

1.4 Model dinamika populasi

Persamaan differensial atau persamaan differensi dapat digunakan sebagai suatu model matematika dalam berbagai fenomena yang melibatkan suatu kuantitas dimana perubahan kuantitas itu proporsional dengan besaran kuantitas tersebut pada saat sekarang. Anggaplah bahwa $N(t)$ menyatakan jumlah individu dalam suatu populasi pada waktu t dalam suatu daerah tertentu, misalnya populasi manusia dalam suatu negara, populasi serangga pada suatu hutan, atau populasi ikan dalam suatu danau. Misalkan pula populasi tersebut mempunyai laju kelahiran dan laju kematian yang konstan. Dalam interval waktu Δt yang cukup kecil, perubahan pada $N(t)$ dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan differensi ataupun dalam bentuk persamaan differensial.

Model perubahan ukuran populasi juga dapat mengakomodasi laju kelahiran dan laju kematian yang tidak konstan. Model dengan waktu tunda (*time delay*) dapat juga dipertimbangkan sekiranya dalam mekanisme perubahan populasi dipengaruhi oleh waktu tunda, yaitu perubahan populasi dipengaruhi oleh ukuran populasi pada beberapa waktu sebelumnya. Model yang melibatkan waktu tunda biasanya lebih kompleks dalam menganalisis dan memprediksi ukuran populasi pada waktu yang akan datang.

Odum (1953) mengklasifikasikan interaksi antara dua spesies yang hidup bersama pada lingkungan yang sama dalam bentuk tanda dari pengaruh interaksinya. Pengaruh spesies ke- j pada spesies ke- i bernilai positif (+), netral (0), dan negatif (-). Tanda tersebut bergantung kepada apakah spesies ke- i bertambah, tidak terpengaruh (tidak ada pengaruh pada perubahan jumlah individu pada spesies ke- i), atau spesies ke- i berkurang, yang disebabkan oleh pengaruh spesies ke- j . Terdapat lima jenis interaksi antara dua spesies, yaitu komensalisme (+ 0), amensalisme (- 0), simbiosis atau mutualisme (+ +), kompetisi (- -), dan mangsa-pemangsa (+ -).

Dua populasi atau spesies yang hidup pada daerah yang sama akan saling berinteraksi. Pengaruh interaksi ini ada yang menguntungkan dan ada juga yang merugikan. Sebagai contoh populasi musang dan kelinci yang hidup pada daerah yang sama akan berinteraksi dalam bentuk mangsa-pemangsa. Populasi musang bertindak sebagai populasi pemangsa sementara populasi kelinci bertindak sebagai populasi mangsa. Suatu model mangsa-pemangsa yang diusulkan oleh Alfred J. Lotka (1880-1949) dan Vito Volterra (1860-1940), yang dikenal sebagai model Lotka-Volterra, menyatakan suatu hubungan fungsional antara perubahan ukuran populasi mangsa dan pemangsa pada saat sekarang yang bergantung kepada ukuran populasi mangsa dan pemangsa pada saat sekarang.

Menurut Jeffries (1989), model klasik Lotka-Volterra yang diperluas dalam dimensi n yaitu melibatkan sebanyak n kompartemen (populasi), dinyatakan sebagai

$$\dot{N}_i = N_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} N_j + b_i \right) + \sum_{j=1}^n c_{ij} N_j \quad (1.11)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, n$. Bentuk $\dot{N} = \frac{dN}{dt}$ menyatakan perubahan ukuran populasi N terhadap waktu t .

Untuk $i \neq j$, bentuk $N_i(a_{ij}N_j)$ merupakan suatu yang menguntungkan ($a_{ij} > 0$) atau suatu yang merugikan ($a_{ij} < 0$) bagi kompartemen ke- i yang disebabkan oleh pengaruh interaksinya dengan kompartemen ke- j . Jika kompartemen ke- i dan ke- j tidak terlibat dalam interaksi (tidak saling memengaruhi), maka $a_{ij} = 0$ dan $a_{ji} = 0$. Bentuk $N_i(a_{ii}N_i)$ diasumsikan bernilai tak positif ($a_{ii} < 0$), yaitu interaksi antar individu dalam populasi ke- i yang merupakan kompetisi antar individu dalam populasi tersebut merupakan sesuatu yang merugikan kompartemen ke- i .

Bentuk $N_i(b_i)$ merupakan sesuatu yang menguntungkan ($b_i > 0$) bagi kompartemen autotrop ke- i , atau sesuatu yang merugikan ($b_i < 0$) bagi kompartemen yang bukan autotrop. Jika kompartemen ke- i merupakan pengurai (*detritus*), maka bentuk $c_{ij}N_j$ merupakan sesuatu yang menguntungkan ($c_{ij} > 0$) bagi kompartemen ke- i yang disebabkan oleh kompartemen ke- j .

Selanjutnya diberikan suatu contoh model perubahan satu populasi mangsa dan satu populasi pemangsa

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= a_1N_1 - a_2N_1N_1 - a_3N_1N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= -b_1N_2 + b_2N_1N_2, \end{aligned} \tag{1.12}$$

dimana a_1, a_2, a_3, b_1 , dan b_2 adalah konstanta positif.

Model mangsa-pemangsa (1.12) menyatakan laju pertumbuhan populasi mangsa $N_1(t)$ pada saat t bertambah secara proporsional dengan ukuran populasi mangsa dan laju pertumbuhannya berkurang dengan adanya interaksi antara populasi pemangsa dan populasi mangsa yang dinyatakan oleh $a_3 N_1 N_2$ dan laju pertumbuhannya juga berkurang karena adanya interaksi antara individu dalam populasi mangsa yang dinyatakan oleh $a_2 N_1 N_1$. Sementara itu, laju pertumbuhan populasi pemangsa $N_2(t)$ pada saat t berkurang secara proporsional dengan ukuran populasi pemangsa dan laju pertumbuhannya bertambah dengan adanya interaksi antara populasi pemangsa dan populasi mangsa yang dinyatakan oleh $b_2 N_1 N_2$.

Model (1.11) juga dapat digunakan untuk menyatakan model kompetisi antara dua populasi, model simbiosis antara dua populasi atau model yang menggabungkan berbagai macam jenis interaksi. Bentuk interaksi antara populasi ke- i dan populasi ke- j ditentukan oleh nilai dari koefisien a_{ij} dan a_{ji} . Jika nilai $a_{ij} > 0$ dan $a_{ji} > 0$, maka interaksi antara populasi ke- i dan populasi ke- j merupakan bentuk mutualisme, yaitu kedua-dua populasi diuntungkan karena pengaruh interaksi tersebut. Hal itu ditandai dengan laju perubahan kedua populasi bernilai positif yang bermakna bahwa kedua populasi akan bertambah. Sementara jika nilai $a_{ij} < 0$ dan $a_{ji} < 0$, maka interaksi antara populasi ke- i dan populasi ke- j merupakan bentuk kompetisi, yaitu kedua-dua populasi dirugikan karena pengaruh interaksi tersebut. Hal itu ditandai dengan laju perubahan kedua populasi

bernilai negatif yang bermakna bahwa kedua populasi akan berkurang.

Pertimbangkan model dinamika populasi yang melibatkan tiga populasi berikut

$$\frac{dN_1}{dt} = 0,50N_1 - 0,10N_1N_1 - 0,05N_1N_2 - 0,04N_1N_3$$

$$\frac{dN_2}{dt} = 0,40N_2 - 0,04N_1N_2 - 0,01N_2N_2 - 0,03N_2N_3$$

$$\frac{dN_3}{dt} = 0,02N_1N_3 + 0,01N_2N_3 - 0,01N_3N_3 .$$

Dari model dinamika populasi di atas diketahui bahwa $a_{12} = -0,05$ dan $a_{21} = -0,04$. Hal ini bermakna bahwa interaksi antara populasi N_1 dan N_2 bersifat kompetisi. Pengaruh dari interaksi tersebut mengurangi jumlah kedua populasi. Diketahui juga bahwa nilai $a_{13} = -0,04$, $a_{31} = 0,02$, $a_{23} = -0,03$, dan $a_{32} = 0,01$. Dari nilai parameter model tersebut diketahui bahwa populasi N_1 dan N_2 merupakan populasi mangsa untuk populasi N_3 . Dengan perkataan lain populasi N_3 merupakan populasi pemangsa untuk populasi N_1 dan N_2 . Populasi N_1 dan N_2 masing-masing berperan sebagai populasi mangsa untuk populasi N_3 . Populasi N_1 berperan sebagai kompetitor untuk populasi N_2 , demikian juga sebaliknya.

1.5 Soal latihan

1. Dengan menggunakan data pada 1950 dan 1952 pada Tabel 1.1. Estimasi nilai k pada model $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$ dan estimasi pula nilai rata-rata populasi dari 1951 sampai dengan 1960.
2. Seseorang melakukan investasi di suatu bank sebesar Rp. 10.000.000,00 dengan sistem bunga majemuk sebesar 5 persen per tahun. Tentukan formula yang menyatakan jumlah investasi setelah sekian tahun kemudian. Tentukan pula jumlah investasi yang akan diterima setelah sepuluh tahun.
3. Suatu zat radioaktif meluruh dengan mengikuti formula $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$, dimana $N(0)$ menyatakan jumlah zat radioaktif pada saat $t = 0$ dan λ menyatakan konstanta peluruhan. Tentukan waktu yang diperlukan zat radioaktif tersebut untuk menjadi setengah dari jumlah awalnya.
4. Anggaplah bahwa laju kelahiran suatu populasi adalah 150 setiap 1.000 (per tahun) dan laju kematiannya adalah 125 setiap 1.000 (per tahun), dan diketahui pula ukuran populasi pada 2010 adalah sebesar 2.000. Tentukan model pertumbuhan populasi tersebut dan nilai prediksi ukuran populasi pada 2020.
5. Diberikan suatu model dinamika populasi yang melibatkan tiga populasi

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(-x_1 - x_2 + 2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(-2x_1 - x_2 - x_3 + 1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3(x_2 - x_3 + x_1).$$

Tentukan peran masing-masing kompartemen x_1 , x_2 , dan x_3 dalam dinamika populasi tersebut.

Bab 2

Sistem Dinamik dan Kestabilan

2.1 Sistem dinamik

Sistem dinamik adalah suatu cabang ilmu matematika yang membahas tentang evolusi suatu sistem yang melibatkan waktu. Sistem dinamik dapat berupa persamaan differensial biasa yang melibatkan waktu yang kontinu, atau berupa suatu persamaan differensi dimana waktu yang terlibat dinyatakan dalam bentuk diskrit. Di sini, kita akan menyelesaikan sistem persamaan dalam bentuk fungsi eksplisit, kalau mungkin. Tetapi untuk sistem dinamik yang cukup kompleks, penyelesaian dalam bentuk eksplisit biasanya tidak dapat diperoleh. Sistem dinamik menekankan pemahaman tentang sifat-sifat geometri dari trajektori (kurva solusi) dan perilaku sistem untuk jangka waktu yang panjang.

Suatu sistem dinamik kontinu dengan dimensi hingga dinyatakan oleh persamaan differensial orde satu dalam bentuk vektor

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t), \quad (2.1)$$

dimana $x(t)$ adalah kuantitas pada saat t dari vektor state dimensi n

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

dan n adalah orde dari sistem.

Penyelesaian dari sistem (2.1) dengan syarat awal $x(0) = x_0$ pada saat $t = t_0$ dinyatakan oleh $x(t; x_0, t_0)$ atau kadang-kadang hanya dinyatakan sebagai $x(t)$. Penyelesaian dari sistem itu disebut suatu trajektori (*trajectory*) atau gerakan (*motion*) atau suatu lintasan (*path*) atau suatu orbit. Penyelesaian dari sistem ini dinyatakan oleh suatu kurva di dalam ruang state dimensi n .

Sistem dinamik (2.1) disebut dalam keadaan statik (*stationary*) jika fungsi vektor f tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu. Sistem yang demikian disebut sistem autonomus (*autonomous system*) yang dinyatakan oleh persamaan

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)). \quad (2.2)$$

Suatu sistem dinamik disebut linear jika fungsi f linear terhadap x . Sistem tersebut dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx(t)}{dt} = J(t) x(t),$$

dimana $J(t)$ adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ yang bergantung pada waktu t .

2.2 Titik keseimbangan dan kestabilan

Jika untuk setiap t pada persamaan (2.2) berlaku

$$f(x_c, t) = 0, \quad (2.3)$$

maka

$$x(t; x_c, t_0) = x_c,$$

untuk sebarang t_0 .

Titik x_c yang memenuhi persamaan (2.3) disebut suatu titik keseimbangan (*equilibrium point*) atau titik kritis (*critical point*) atau keadaan seimbang (*equilibrium state*). Dengan demikian, suatu solusi yang melalui titik keseimbangan x_c pada suatu saat akan tetap berada pada titik tersebut untuk setiap waktu t . Solusi yang demikian disebut solusi setimbang (*equilibrium solution*) atau trajektori konstan (*constant trajectory*) dan jika $x_c = 0$, maka solusi tersebut dikatakan solusi nol (*null solution*).

Misalkan x_c adalah suatu titik keseimbangan dari sistem dinamik

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t),$$

dengan

$$f(x_c, t) = 0 \text{ untuk setiap } t.$$

Definisi 2.1 Titik keseimbangan x_c , atau solusi keseimbangan $x(t) = x_c$ dikatakan stabil jika diberikan sebarang t_0 dan bilangan positif ε , terdapat suatu bilangan positif $\delta(\varepsilon, t_0)$ sedemikian sehingga, jika

$$\|x_0 - x_c\| < \delta$$

berlaku

$$\|x(t; x_0, t_0) - x_c\| < \varepsilon$$

untuk setiap $t \geq t_0$.

Definisi 2.2 Titik keseimbangan x_c disebut konvergen yaitu stabil secara quasi-asimptotik (*quasi-asymptotically stable*), jika untuk sebarang t_0 terdapat $\delta_1(t_0)$ sedemikian sehingga, jika

$$\|x_0 - x_c\| < \delta_1$$

berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0, t_0) = x_c,$$

untuk setiap t_0 . Dengan perkataan lain, untuk setiap ε_1 , terdapat $T(\varepsilon_1, x_0, t_0)$ sedemikian sehingga, jika

$$\|x_0 - x_c\| < \delta_1$$

berlaku

$$\|x(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon_1,$$

untuk setiap $t \geq t_0 + T$.

Definisi 2.3 Titik keseimbangan x_e disebut stabil asimptotik, jika ia konvergen dan stabil.

Definisi 2.4 Titik keseimbangan x_e disebut stabil asimptotik global, jika ia stabil dan setiap trajektori konvergen ke titik keseimbangan tersebut untuk t menuju ke tak berhingga.

2.3 Bidang fase

Selanjutnya kita akan membatasi pembahasan untuk sistem dinamik dengan dimensi dua. Pertimbangkan dua persamaan differensial autonomus orde satu,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan asumsi bahwa fungsi f dan g bersama-sama dengan turunan parsial pertamanya $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, dan $\frac{\partial g}{\partial y}$ kontinu pada suatu daerah pada bidang xy .

Solusi dari sistem (2.4) adalah suatu kurva pada bidang xy , yaitu sepasang persamaan parameter $x = x(t)$ dan $y = y(t)$, dimana turunan pertamanya memenuhi sistem (2.4). Kurva

solusi yang mempunyai koordinat $(x(t), y(t))$ berubah karena perubahan waktu t . Bidang xy dinyatakan sebagai bidang fase (*phase plane*).

Untuk suatu persamaan differensial orde dua, sebagai contoh sistem pegas $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt}$, sistem ini dapat dinyatakan dalam sistem (dua) persamaan differensial orde satu dengan memisalkan $y = \frac{dx}{dt}$ dan dengan itu diperoleh

$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Selanjutnya persamaan differensial

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt}$ dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}y.$$

Bidang fase dari sistem ini adalah bidang xy atau sumbu x versus sumbu $\frac{dx}{dt}$.

2.4 Sistem persamaan differensial linear orde satu koefisien konstan dimensi dua

Pada bagian ini, akan dibahas sistem persamaan differensial linear homogen dengan dua persamaan orde satu koefisien konstan,

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y \quad (2.5.a)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_3x + a_4y, \quad (2.5.b)$$

dimana a_1 , a_2 , a_3 , dan a_4 adalah suatu konstanta. Sistem (2.5) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\frac{dv}{dt} = Av,$$

dimana

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dan } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Jika $\det(A) \neq 0$, maka satu-satunya titik keseimbangan dari sistem (2.5) adalah titik $(0, 0)$. Sistem seperti pada persamaan (2.5) menarik untuk dianalisis perilaku solusi di sekitar titik keseimbangan $(0, 0)$ karena ada berbagai jenis perilaku solusi di sekitar titik tersebut. Untuk menganalisis perilaku solusi di sekitar titik keseimbangan tersebut, disini akan digunakan dua metode, yaitu metode eliminasi dan metode matriks.

2.4.1 Metode eliminasi

Jika $a_3 \neq 0$ maka x dapat dieliminasi dari persamaan (2.5.a) dengan menggunakan nilai x dari persamaan (2.5.b), yaitu

$$x = \frac{1}{a_3} \frac{dy}{dt} - \frac{a_4}{a_3} y. \quad (2.6)$$

Dengan dasar ini, metode ini dikatakan sebagai metode eliminasi. Sistem persamaan direduksi menjadi satu persamaan differensial orde dua. Dari persamaan (2.6) diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a_3} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{a_4}{a_3} \frac{dy}{dt}$$

Dengan mensubstitusi kedua persamaan di atas ke dalam persamaan (2.5.a) diperoleh

$$\frac{1}{a_3} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{a_4}{a_3} \frac{dy}{dt} = \frac{a_1}{a_3} \frac{dy}{dt} - \frac{a_1 a_4}{a_3} y + a_2 y,$$

dan selanjutnya diperoleh

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (a_1 + a_4) \frac{dy}{dt} + (a_1 a_4 - a_2 a_3) y = 0.$$

Persamaan differensial orde dua tersebut dengan mudah diselesaikan karena ia mempunyai koefisien konstan.

Misalkan $y = e^{rt}$ adalah solusi persamaan differensial orde dua tersebut, maka diperoleh

$$r^2 e^{rt} - (a_1 + a_4) r e^{rt} + (a_1 a_4 - a_2 a_3) e^{rt} = 0.$$

Karena $e^{rt} \neq 0$, maka diperoleh persamaan polinomial karakteristik

$$f(r) = r^2 - (a_1 + a_4)r + (a_1 a_4 - a_2 a_3),$$

yang mempunyai akar-akar

$$r_{1,2} = \frac{(a_1 + a_4) \pm \sqrt{(a_1 + a_4)^2 - 4(a_1 a_4 - a_2 a_3)}}{2}. \quad (2.7)$$

Dengan demikian diperoleh solusi

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

dengan c_1 dan c_2 menyatakan konstanta integrasi yang bersesuaian dengan syarat awal.

Dengan mendiferensialkan satu kali terhadap t diperoleh $\frac{dy}{dt} = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}$ dan bersama-sama dengan penyelesaian $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ disubstitusikan ke dalam persamaan (2.5.b), diperoleh

$$c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} = a_3 x + c_1 a_4 e^{r_1 t} + c_2 a_4 e^{r_2 t}$$

dan seterusnya diperoleh

$$x(t) = c_1 \frac{r_1 - a_4}{a_3} e^{r_1 t} + c_2 \frac{r_2 - a_4}{a_3} e^{r_2 t}.$$

Dengan demikian diperoleh solusi dari sistem persamaan (2.5) sebagai

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ x(t) &= c_1 \frac{r_1 - a_4}{a_3} e^{r_1 t} + c_2 \frac{r_2 - a_4}{a_3} e^{r_2 t}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dalam kasus $a_3 = 0$, maka persamaan (2.5.b) dapat diselesaikan langsung dan diperoleh solusi untuk y , yaitu $y(t) = c_3 e^{a_4 t}$. Dengan itu x dapat diselesaikan dari persamaan (2.5.a), yaitu

$$x(t) = c_4 e^{a_4 t} + \frac{a_2 c_3}{a_4 - a_1} e^{a_4 t} \quad \text{jika } a_4 \neq a_1$$

atau

$$x(t) = c_4 e^{\alpha t} + a_2 c_3 t e^{\alpha t} \quad \text{jika } a_4 = a_1.$$

2.4.2 Metode sistem dengan teori matriks

Metode lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan differensial linear koefisien konstan adalah dengan menyatakan sistem persamaan dalam bentuk matriks dan vektor. Sistem persamaan differensial (2.5) dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

atau dalam bentuk

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A\vec{v},$$

dimana

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Metode ini mempunyai kelebihan tersendiri yaitu dapat dengan mudah diperumum untuk sistem persamaan differensial yang melibatkan lebih banyak persamaan.

Solusi dari persamaaan (2.9) dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{At}, \quad (2.10)$$

yang ekuivalen dengan

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{rt},$$

dimana $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ adalah vektor konstan yang akan ditentukan.

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.10) ke dalam persamaan (2.9) diperoleh

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

yang ekuivalen dengan

$$A\vec{v}_0 = r\vec{v}_0.$$

Penyelesaian nontrivial dari persamaan (2.11), yaitu $\vec{v}_0 \neq 0$, wujud hanya untuk nilai r tertentu, yang disebut sebagai nilai eigen dari matriks A . Persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai sistem homogen

$$\begin{pmatrix} a_1 - r & a_2 \\ a_3 & a_4 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

atau

$$(A - rI)\vec{v}_0 = 0,$$

dimana I adalah matriks identitas.

Dari aljabar linear diketahui bahwa terdapat suatu solusi nontrivial untuk sistem persamaan linear homogen jika dan hanya jika determinan dari matriks koefisiennya sama dengan nol, yaitu

$$\begin{vmatrix} a_1 - r & a_2 \\ a_3 & a_4 - r \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

atau

$$|A - rI| = 0.$$

Dengan menyelesaikan persamaan (2.13) diperoleh

$$(a_1 - r)(a_4 - r) - a_2 a_3 = 0.$$

Persamaan ini menghasilkan dua akar, yaitu

$$r_{1,2} = \frac{(a_1 + a_4) \pm \sqrt{(a_1 + a_4)^2 - 4(a_1 a_4 - a_2 a_3)}}{2}. \quad (2.14)$$

Hasil yang diperoleh sama dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi.

Jika nilai akar-akar (nilai eigen) mempunyai nilai yang berbeda, maka nilai nontrivial $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen harus ditentukan. Vektor ini disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen. Jika suatu nilai eigen yang ditandai sebagai r_i dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen r_i adalah $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, maka penyelesaiannya diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^2 c_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} e^{r_i t}, \quad (2.15)$$

yang ekuivalen dengan

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^2 c_i \vec{v}_i e^{r_i t},$$

dimana c_i adalah konstanta sebarang.

Contoh 2.1 Misalkan diberikan sistem persamaan differensial berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 4y, \end{aligned} \tag{2.16}$$

yang dalam notasi matriks ditulis sebagai $d\vec{v}/dt = A\vec{v}$, dimana

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dan } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Kita pertimbangkan solusinya dalam bentuk $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{rt}$ atau

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{rt}.$$

Dengan mensubstitusikan solusi tersebut peroleh

$$\begin{pmatrix} 1-r & -2 \\ 3 & -4-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Untuk solusi nontrivial dari persamaan matriks (2.17) diketahui bahwa

$$\begin{vmatrix} 1-r & -2 \\ 3 & -4-r \end{vmatrix} = 0,$$

yang menghasilkan $r^2 + 3r + 2 = 0$ dengan nilai eigen $r = -1$ dan $r = -2$.

Untuk nilai eigen $r = -1$. Dengan mensubstitusikan $r = -1$ pada persamaan (2.17) diperoleh

$$2x_0 - 2y_0 = 0$$

$$3x_0 - 3y_0 = 0.$$

Kedua persamaan ini saling bergantung. Dari persamaan tersebut (salah satunya boleh digunakan), diperoleh $x_0 = y_0$. Dengan demikian diperoleh vektor eigen

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Disini, vektor eigennya adalah sebarang kelipatan dari vektor konstan $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hal ini lazim untuk memperkenalkan c_1 sebagai sebarang konstanta yang bersesuaian dengan nilai eigen $r = -1$. Dengan demikian penyelesaian dari sistem (2.16) adalah

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Untuk nilai eigen $r = -2$. Dengan mensubstitusikan $r = -2$ pada persamaan (2.17) diperoleh

$$3x_0 - 2y_0 = 0$$

$$3x_0 - 2y_0 = 0.$$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $r = -2$ adalah

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 3x_0 \end{pmatrix} = \frac{x_0}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vektor eigennya adalah sebarang kelipatan dari vektor konstan $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan penyelesaian dari sistem (2.16) adalah

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Dengan demikian penyelesaian umum dari persamaan (2.16) adalah

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t},$$

yang ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-2t} \\ y(t) &= c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-2t}, \end{aligned}$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang.

Dari Contoh 2.1 diperoleh dua nilai eigen yang real negatif dan berbeda, dalam kasus yang lain mungkin diperoleh nilai eigen yang real positif dan berbeda ataupun bilangan kompleks.

Contoh 2.2 Pertimbangkan sistem persamaan differensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 4y. \end{aligned}$$

Pertimbangkan bahwa solusi dari sistem di atas mempunyai bentuk

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{rt}.$$

Dengan mensubstitusikan solusi tersebut diperoleh

$$\begin{pmatrix} 2-r & -2 \\ 5 & -4-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Dari persamaan (2.18) diperoleh polinomial karakteristik

$$\begin{vmatrix} 2-r & -2 \\ 5 & -4-r \end{vmatrix} = 0,$$

atau $r^2 + 2r + 2 = 0$ yang memberikan nilai eigen $r = -1 + i$ dan $r = -1 - i$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $r = -1 + i$ memenuhi kedua persamaan

$$\begin{aligned} (3-i)x_0 - 2y_0 &= 0 \\ 5x_0 + (-3-i)y_0 &= 0. \end{aligned}$$

Kedua persamaan tersebut saling bergantung. Vektor eigen dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_0 \\ (3-i)x_0 \end{pmatrix} = \frac{x_0}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix}.$$

Untuk nilai eigen $r = -1 - i$, karena nilai eigen ini adalah konjugat dari nilai eigen $r = -1 + i$, maka vektor eigennya juga merupakan konjugat dari vektor eigen yang bersesuaian dengan

nilai $r = -1 + i$. Dengan demikian vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $r = -1 - i$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_0 \\ (3+i)x_0 \end{pmatrix} = \frac{x_0}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix}.$$

Dalam hal ini, diperoleh solusi umum

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t},$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta kompleks sebarang.

Dengan menggunakan formula Euler

$$e^{i\alpha t} = \cos(\alpha t) + i \sin(\alpha t)$$

$$e^{-i\alpha t} = \cos(\alpha t) - i \sin(\alpha t),$$

maka solusi di atas dapat ditulis sebagai

$$x(t) = 2e^{-t} [c_1 (\cos(t) + i \sin(t)) + c_2 (\cos(t) - i \sin(t))]]$$

$$y(t) = e^{-t} [(3-i)c_1 (\cos(t) + i \sin(t)) + (3+i)c_2 (\cos(t) - i \sin(t))]]$$

Dengan memisalkan $\alpha = c_1 + c_2$ dan $\beta = i(c_1 - c_2)$, maka solusi di atas dapat dituliskan dalam bentuk sederhana

$$x(t) = 2e^{-t} [\alpha \cos t + \beta \sin t]$$

$$y(t) = e^{-t} [(3\alpha - \beta) \cos t + (3\beta + \alpha) \sin t],$$

dimana α dan β adalah konstanta sebarang.

2.5 Kestabilan titik keseimbangan sistem dimensi dua

Perilaku trajektori di sekitar titik keseimbangan yang dinyatakan oleh sistem persamaan differensial dengan koefisien konstan

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y$$

$$\frac{dy}{dt} = a_3x + a_4y$$

telah dibahas pada bagian sebelumnya. Penyelesaian dari sistem persamaan differensial tersebut memuat kombinasi linear dari eksponensial e^{rt} , dimana

$$r = \frac{(a_1 + a_4) \pm \sqrt{(a_1 + a_4)^2 - 4(a_1a_4 - a_2a_3)}}{2}$$

merupakan akar-akar dari polinomial karakteristik. Akar-akarnya real dan tidak sama jika $(a_1 + a_4)^2 - 4(a_1a_4 - a_2a_3) > 0$, akar-akarnya real dan sama jika $(a_1 + a_4)^2 - 4(a_1a_4 - a_2a_3) = 0$, sementara jika $(a_1 + a_4)^2 - 4(a_1a_4 - a_2a_3) < 0$ maka diperoleh dua akar kompleks yang saling konjugat dengan yang lainnya.

Disini kita akan membahas kestabilan dari titik keseimbangan $(0, 0)$ dari sistem persamaan differensial di atas. Untuk itu kita harus membahas bagaimana perilaku trajektori untuk waktu t membesar tanpa batas, yaitu pada saat t menuju ke tak berhingga. Perilaku trajektori dapat diketahui dengan memperhatikan tanda (bernilai positif, nol, atau negatif) dari bagian real kedua akar-akar dari polinomial karakteristik.

Teorema 2.1 (Willems, 1970). Titik keseimbangan $(0, 0)$ dari sistem persamaan differensial linear (2.5) adalah stabil jika semua bagian real dari nilai eigen matriks A tidak positif dan stabil asimptotik jika semua bagian real dari nilai eigen matriks A bernilai negatif. Titik keseimbangan $(0, 0)$ tidak stabil jika terdapat nilai eigen dari matriks A mempunyai bagian real yang positif.

Misalkan

$$p = a_1 + a_4,$$

$$q = a_1 a_4 - a_2 a_3, \text{ dan}$$

$$\Delta = (a_1 + a_4)^2 - 4(a_1 a_4 - a_2 a_3) = p^2 - 4q.$$

Dengan menggunakan pemisalan di atas, kita memperoleh hubungan akar-akar polinomial dengan kondisi kestabilan berikut.

Tabel 2.1 Jenis-jenis akar untuk dua persamaan

Akar-akar	Kondisi
(1) real dan berbeda	$\Delta > 0$
(2) real dan sama	$\Delta = 0$
(3) kompleks konjugat	$\Delta < 0$

Detail untuk semua jenis-jenis akar lebih lanjut diberikan pada Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2 Jenis-jenis akar dan kestabilan

Akar-akar	Kestabilan
(1). Akar-akar real dan berbeda ($\Delta > 0$)	
A. sama tanda ($q > 0$) (a) keduanya positif ($p > 0$) (b) keduanya negatif ($p < 0$)	Tidak stabil Stabil
B. berbeda tanda ($q < 0$)	Tidak stabil
C. satu akarnya bernilai nol ($q = 0$) (a) akar yang lain positif ($p > 0$) (b) akar yang lain negatif ($p < 0$)	Tidak stabil Stabil Neutral
(2). Akar-akar real dan sama ($\Delta = 0$)	
A. sama tanda ($q > 0$) (a) keduanya positif ($p > 0$) (b) keduanya negatif ($p < 0$)	Tidak stabil Stabil
B. keduanya sama dengan nol ($p = 0$)	Tidak stabil aljabar
(3). Akar-akar kompleks ($\Delta < 0$)	
A. bagian real sama tanda (a) keduanya positif ($p > 0$) (b) keduanya negatif ($p < 0$)	Tidak stabil Stabil
B. bagian real sama dengan nol ($p = 0$)	Stabil Neutral

2.6 Solusi kualitatif sistem persamaan differensial linear

Pada bagian ini, solusi sistem persamaan differensial linear homogen dengan koefisien konstan akan dianalisis secara kualitatif. Perilaku solusi di sekitar titik keseimbangan sistem menjadi menarik diperhatikan untuk menentukan jenis kestabilan titik keseimbangan sistem.

Teorema 2.2 (Burton, 1985). Solusi sistem persamaan differensial linear koefisien konstan $\frac{dx}{dt} = Ax$, $x(0) = x_0$, dengan A suatu matriks yang dapat didiagonalisasi, adalah $x(t) = e^{At}x_0 = Pe^{-t}P^{-1}x_0$, dimana $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah suatu matriks yang kolom-kolomnya merupakan vektor eigen dari matriks A dan $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, λ_i merupakan nilai eigen dari matriks A .

Mereduksi suatu sistem differensial linear koefisien konstan ke dalam bentuk kanonik Jordan merupakan salah satu metode untuk mendapatkan solusi dengan mudah. Metode ini sering digunakan dalam menganalisis kestabilan titik keseimbangan sistem linear. Dengan menggunakan transformasi $x = Py$, sistem

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (2.10)$$

ditransformasi ke dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P \frac{dy}{dt} = APy, \quad y(0) = y_0 \\ \frac{dy}{dt} &= P^{-1}APy = Jy, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Solusi dari sistem $\frac{dy}{dt} = Jy$ dengan $y(0) = y_0$ adalah

$y(t) = e^{Jt} y_0$, dimana $e^{Jt} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$, $t \in \mathbb{R}$. Sistem (2.10) dan sistem (2.11) ekuivalen secara topologi. Dengan demikian analisis untuk kedua sistem tersebut adalah serupa, hanya ada perubahan pada sistem koordinat.

Untuk kasus dua dimensi, sistem $\frac{dx}{dt} = Ax$ dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_3 x_1 + a_4 x_2.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen dari matriks A . Dengan menggunakan transformasi $x = Py$, maka sistem (2.12) menjadi $\frac{dy}{dt} = P^{-1}APy = Jy$ dengan J adalah bentuk kanonik Jordan yang dapat berbentuk

- (i) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, jika λ_1 dan λ_2 real dan berbeda,
- (ii) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \gamma \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, jika λ_1 dan λ_2 real dan sama,
- (iii) $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, jika $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Selanjutnya analisis kestabilan titik keseimbangan model (2.12) ditinjau dalam beberapa kasus.

Kasus 1 Nilai eigen λ_1 dan λ_2 adalah real.

Kasus 1.a Nilai eigen $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Kasus 1.b Nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2$.

Perhatikan bahwa jika $\det(A - \lambda_1 I) = 0$ maka rank dari matriks $(A - \lambda_1 I)$ bernilai nol atau bernilai satu.

Kasus 1.b.i Rank matriks $(A - \lambda_1 I)$ adalah nol.

Kasus 1.b.ii Rank matriks $(A - \lambda_1 I)$ adalah satu.

Kasus 2 Nilai eigen adalah kompleks konjugat.

Pada Kasus 1.a, sistem dalam bentuk kanonik Jordan merupakan sistem dengan dua persamaan differensial yang saling bebas. Dengan demikian solusinya adalah $x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ dan $x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Kedua solusi akan menuju ke nol jika $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$, tetapi solusi akan menuju ke tak berhingga jika $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Dalam kasus kedua nilai eigen bernilai positif dan berbeda atau kedua nilai eigen bernilai negatif dan berbeda, maka titik keseimbangan $(0, 0)$ disebut suatu node (node tidak sejati) untuk sistem. Jika $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ maka solusi $x_1(t)$ lebih cepat menuju ke nol dibandingkan dengan solusi $x_2(t)$, demikian juga sebaliknya.

Contoh 2.3 Tinjau sistem persamaan differensial

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 4x_2.$$

Dari sistem tersebut diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -2$.

Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan

$\lambda_2 = -2$ berturut-turut adalah $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

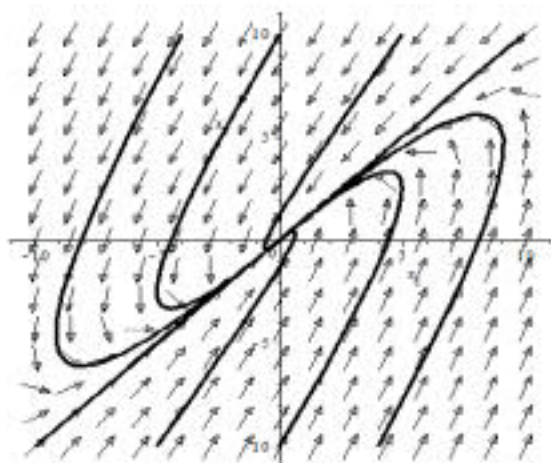
Selanjutnya diperoleh matriks $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Dengan menggunakan transformasi $x = Py$, yaitu $x_1 = y_1 + 2y_2$ dan $x_2 = y_1 + 3y_2$, sistem semula menjadi

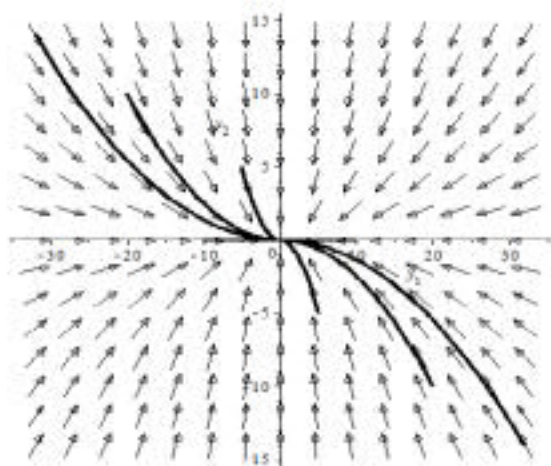
$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -2y_2.$$

Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(x_1, x_2) = (0, 0)$ bagi sistem semula dengan nilai awal $(-4, 10)$, $(0, 10)$, $(5, 10)$, $(10, 10)$, $(-10, -10)$, $(-5, -10)$, $(0, -10)$, dan $(4, -10)$ diberikan pada Gambar 2.1. Sementara plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$ untuk sistem dalam bentuk kanonik Jordan dengan nilai awal yang bersesuaian dengan sistem semula $(-32, 14)$, $(-20, 10)$, $(-5, 5)$, $(10, 0)$, $(-10, 0)$, $(5, -5)$, $(20, -10)$, dan $(32, -14)$ diberikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.1 Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(x_1, x_2) = (0, 0)$



Gambar 2.2 Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$

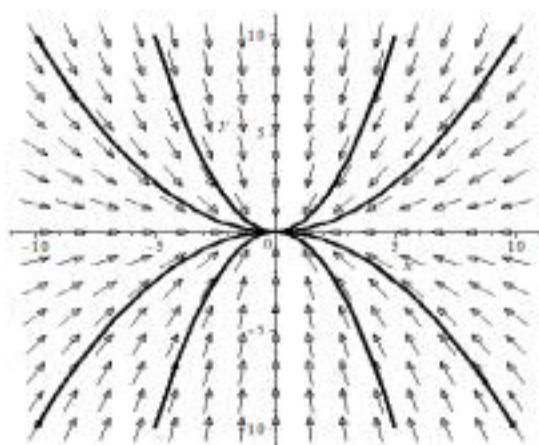
Gambar 2.1 dan 2.2 memberikan informasi yang sama secara kualitatif bahwa kurva trajektori di sekitar titik keseimbangan $(0, 0)$ akan menuju ke titik keseimbangan $(0, 0)$ untuk t menuju ke tak berhingga. Titik keseimbangan $(0, 0)$ merupakan suatu node (node tidak sejati) yang stabil. Trajektori pada Gambar 2.2. mengalami perubahan bentuk akibat dari transformasi koordinat, dari (x_1, x_2) menjadi (y_1, y_2) .

Contoh 2.4 Pertimbangkan sistem dinamik linear

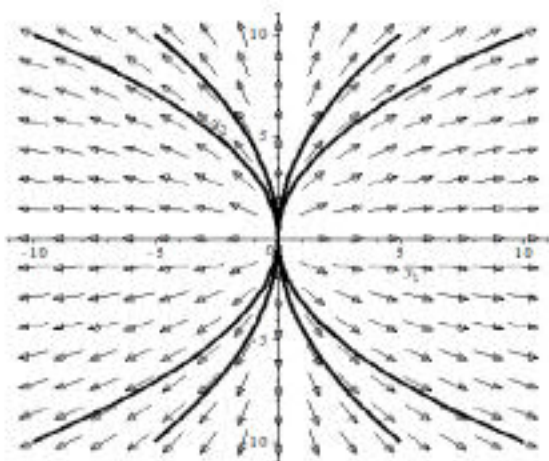
$$(i) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -2y_2 \end{aligned} \quad \text{dan}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= 2y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2. \end{aligned}$$

Sistem (i) mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -2$, sementara sistem (ii) mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$. Titik keseimbangan $(0, 0)$ untuk sistem (i) merupakan node (node tidak sejati) dan stabil, sementara titik keseimbangan $(0, 0)$ untuk sistem (ii) juga merupakan suatu node (node tidak sejati) tetapi tidak stabil. Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(0, 0)$ diberikan pada Gambar 2.3 dan Gambar 2.4



Gambar 2.3 Titik keseimbangan $(0, 0)$ yang stabil dan merupakan suatu node



Gambar 2.4 Titik keseimbangan $(0, 0)$ yang tidak stabil dan merupakan suatu node

Contoh 2.5 Tinjau sistem dinamik linear

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2.$$

Dari sistem tersebut diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = 4$. Sistem tersebut merupakan contoh Kasus 1.a. dengan nilai eigen real dan berbeda tanda. Vektor eigen yang bersesuaian dengan

nilai eigen $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = 4$ berturut-turut adalah $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

dan $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Selanjutnya diperoleh matriks $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan

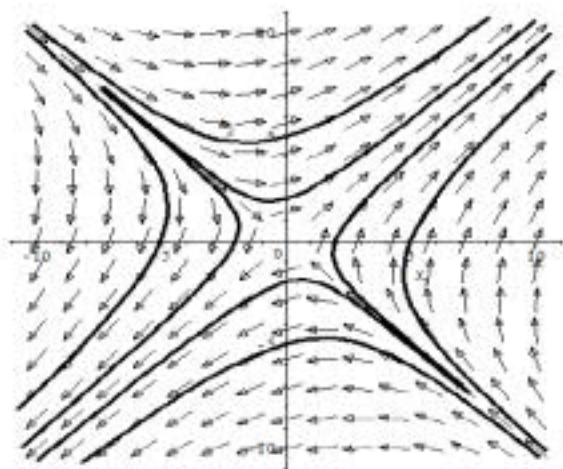
$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Dengan menggunakan transformasi $x = Py$,

yaitu $x_1 = -y_1 + y_2$ dan $x_2 = y_1 + y_2$, sistem semula menjadi

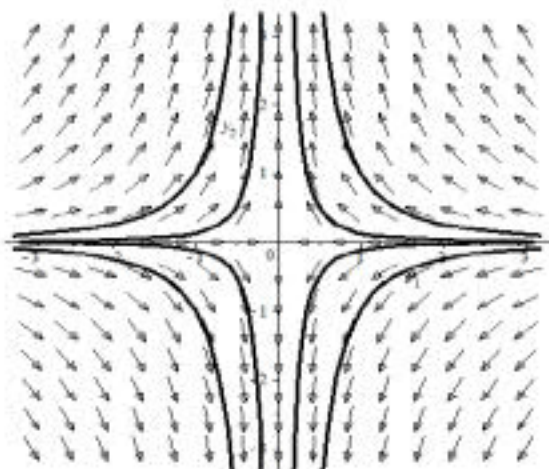
$$\frac{dy_1}{dt} = -2y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 4y_2.$$

Kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(x_1, x_2) = (0, 0)$ bagi sistem semula dengan beberapa nilai awal diberikan pada Gambar 2.5. Sementara plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$ untuk sistem dalam bentuk kanonik Jordan dengan beberapa nilai awal diberikan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.5 Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(x_1, x_2) = (0, 0)$



Gambar 2.6 Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$

Gambar 2.5 dan 2.6 memberikan informasi yang sama secara kualitatif bahwa kurva trajektori di sekitar titik keseimbangan $(0, 0)$ terdapat dua trajektori yang menuju ke titik keseimbangan $(0, 0)$ untuk t menuju ke tak berhingga dan terdapat dua trajektori yang menuju ke titik keseimbangan $(0, 0)$ untuk t menuju ke negatif tak berhingga. Sementara trajektori yang lainnya tidak akan menuju ke titik keseimbangan $(0, 0)$. Titik keseimbangan $(0, 0)$ merupakan pelana (*saddle point*), titik yang tidak stabil.

Untuk sistem yang memenuhi Kasus 1.b, sistem dalam bentuk kanonik Jordan dengan nilai eigen real dan sama dinyatakan dalam bentuk

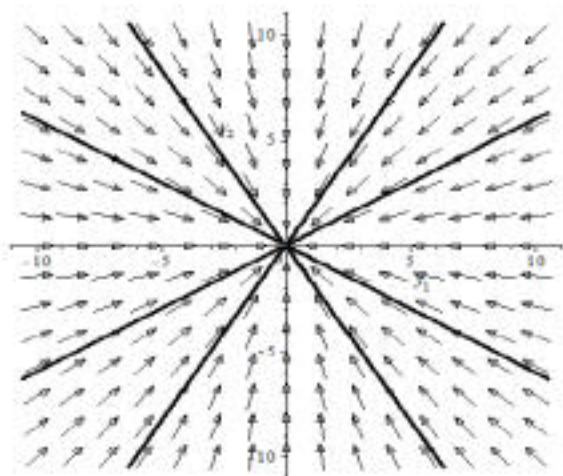
$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= \lambda y_1 + \gamma y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda y_2.\end{aligned}$$

Solusi dari sistem tersebut adalah $y_2 = y_2(0)e^{\lambda t}$ dan $y_1 = (y_1(0) + y_2(0)\gamma t)e^{\lambda t}$. Trajektori yang melalui titik $(y_1(0), y_2(0)) \neq (0, 0)$ pada saat $t = 0$ akan menuju ke titik $(0, 0)$ untuk t menuju ke tak berhingga jika $\lambda < 0$ dan trajektori akan menjauh dari titik $(0, 0)$ untuk t menuju ke tak berhingga jika $\lambda > 0$. Jika $y_2(0) \neq 0$ dan $\gamma > 0$, maka

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1(0) + y_2(0)\gamma t}{y_2(0)} = \frac{y_1(0)}{y_2(0)} + \gamma t$$

akan menuju ke tak berhingga jika t menuju ke tak berhingga. Jika $y_2(0) \neq 0$ dan $\gamma > 0$, maka $\frac{y_1}{y_2}$ akan menuju ke negatif tak berhingga jika t menuju ke negatif tak berhingga. Dari kedua solusi diperoleh hubungan $y_2 = \left(\frac{y_2(0)}{y_1(0) + y_2(0)\gamma t} \right) y_1$.

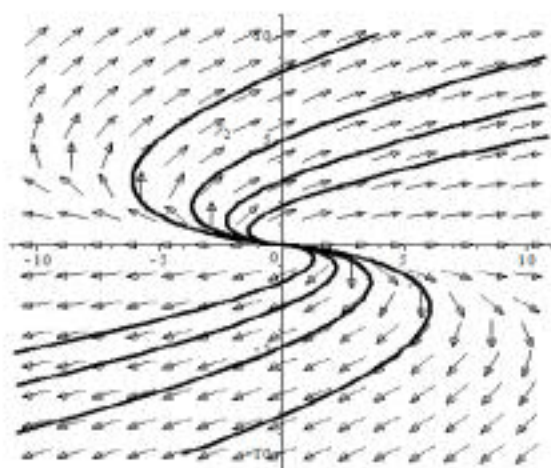
Untuk $\lambda = -0.5$ dan $\gamma = 0$ diperoleh $\text{rank}(A - \lambda I) = 0$, Kasus 1.b.i. Plot trajektori di sekitar titik keseimbangan $(0, 0)$ diberikan pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$ yang stabil dan merupakan node sejati

Dari Gambar 2.7 diketahui bahwa semua trajektori menuju ke titik keseimbangan $(0, 0)$ dengan kemiringan kurva solusi adalah $\frac{y_2(0)}{y_1(0)}$ untuk semua nilai t .

Untuk $\lambda = 0.5$ dan $\gamma = 1$, diperoleh $\text{rank}(A - \lambda I) = 1$, Kasus 1.b.ii. Plot trajektori di sekitar titik keseimbangan $(0, 0)$ diberikan pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Titik keseimbangan $(y_1, y_2) = (0, 0)$ yang tidak stabil dan merupakan node tidak sejati

Dari Gambar 2.8 diketahui bahwa semua trajektori seolah-olah berasal dari titik keseimbangan $(0, 0)$ dengan kemiringan kurvanya menuju nol untuk t menuju ke negatif tak berhingga.

Pada Kasus 2, trajektori yang diperoleh dari sistem merupakan suatu spiral atau suatu lintasan tertutup periodik

(lingkaran atau elips) jika nilai eigen yang diperoleh dari sistem persamaan differensial (2.12) adalah kompleks konjugat. Suatu contoh sederhana sistem yang mempunyai akar-akar kompleks konjugat adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_1x_1 + a_2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a_2x_1 + a_1x_2.\end{aligned}$$

Akar-akar dari polinomial karakteristiknya, yaitu $(a_1 - \lambda)^2 + a_2^2 = 0$, adalah $\lambda = a_1 \pm ia_2$.

Bentuk persamaan differensial tersebut mengisyaratkan kita untuk membawanya ke dalam bentuk koordinat polar (r, θ)

dengan $r^2 = (x_1^2 + x_2^2)$ dan $\tan \theta = \frac{x_2}{x_1}$. Karena x_1 dan x_2

bergantung kepada t maka r dan θ juga bergantung kepada t .

Selanjutnya dengan mendifferensialkan kedua ruas dari $r^2 = (x_1^2 + x_2^2)$ terhadap t diperoleh

$$2r \frac{dr}{dt} = 2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt}.$$

Dengan mengingat bahwa $\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + a_2x_2$ dan

$\frac{dx_2}{dt} = -a_2x_1 + a_1x_2$, diperoleh

$$r \frac{dr}{dt} = x_1(a_1x_1 + a_2x_2) + x_2(-a_2x_1 + a_1x_2) = a_1(x_1^2 + x_2^2) = a_1r^2.$$

Dari persamaan terakhir diperoleh $\frac{dr}{dt} = a_1r$ dengan solusi

$$r(t) = r_0 e^{a_1 t}.$$

Dengan mendifferensialkan kedua ruas dari $\tan \theta = \frac{x_2}{x_1}$

terhadap t diperoleh

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt}}{x_1^2}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} &= \frac{x_1(-a_2 x_1 + a_1 x_2) - x_2(a_1 x_1 + a_2 x_2)}{x_1^2} \\ &= \frac{-a_2(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2} = \frac{-a_2 r^2}{x_1^2} = -a_2 \sec^2 \theta. \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh $\frac{d\theta}{dt} = -a_2$ yang mempunyai solusi

$\theta(t) = -a_2 t + \theta_0$. Dari kedua solusi $r(t) = r_0 e^{a_1 t}$ dan $\theta(t) = -a_2 t + \theta_0$ diperoleh hubungan $r = r_0 e^{-(a_1/a_2)(\theta - \theta_0)}$.

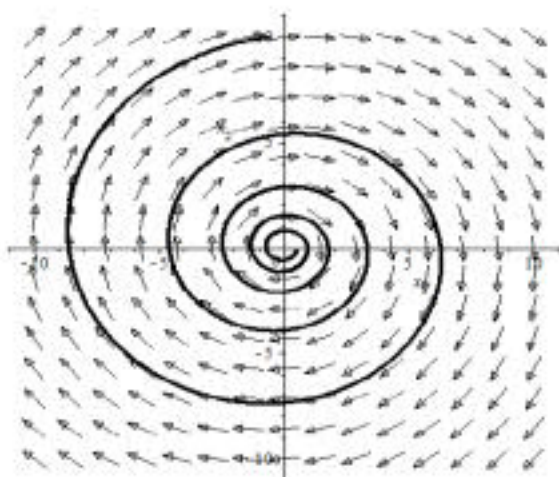
Kurva $r = r_0 e^{-(a_1/a_2)(\theta - \theta_0)}$ disebut spiral eksponensial (*exponential spiral*) untuk $a_1 \neq 0$. Jika $a_1 = 0$, maka diperoleh kurva tertutup yang berbentuk lingkaran. Hal ini tidak mengherankan karena jika $a_1 = 0$, maka diperoleh akar-akar kompleks murni, yaitu $\pm ia_2$, yang mana penyelesaian x_1 dan x_2 menunjukkan suatu gerak harmonik dengan frekuensi a_2 .

Dengan memperhatikan solusi $r(t) = r_0 e^{a_1 t}$ dan $\theta(t) = -a_2 t + \theta_0$, maka nilai a_1 menentukan jarak trajektori dengan titik $(0, 0)$ dan nilai a_2 menyatakan arah gerak

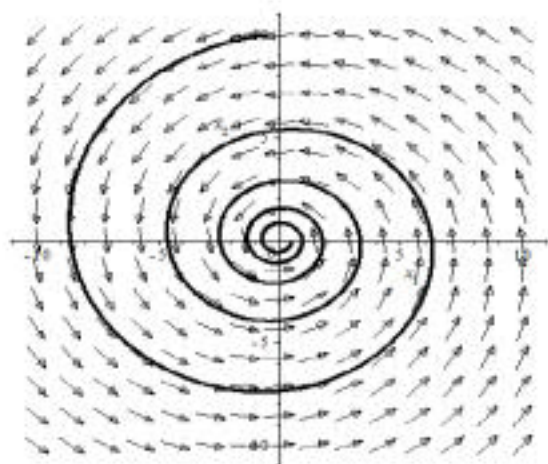
trajektori. Berikut diberikan beberapa kondisi yang mungkin terjadi.

- (i) Jika $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$, maka trajektori bergerak secara spiral keluar dan searah jarum jam. Titik keseimbangan $(0, 0)$ tidak stabil.
- (ii) Jika $a_1 > 0$ dan $a_2 < 0$, maka trajektori bergerak secara spiral keluar dan berlawanan arah jarum jam. Titik keseimbangan $(0, 0)$ tidak stabil.
- (iii) Jika $a_1 < 0$ dan $a_2 > 0$, maka trajektori bergerak secara spiral masuk dan searah jarum jam. Titik keseimbangan $(0, 0)$ stabil asimptotik.
- (iv) Jika $a_1 < 0$ dan $a_2 < 0$, maka trajektori bergerak secara spiral masuk dan berlawanan arah jarum jam. Titik keseimbangan $(0, 0)$ stabil asimptotik.
- (v) Jika $a_1 = 0$ dan $a_2 > 0$, maka trajektori berbentuk lingkaran dan searah dengan arah jarum jam. Titik keseimbangan $(0, 0)$ stabil.
- (vi) Jika $a_1 = 0$ dan $a_2 < 0$, maka trajektori berbentuk lingkaran dan berlawanan arah jarum jam. Titik keseimbangan $(0, 0)$ stabil.

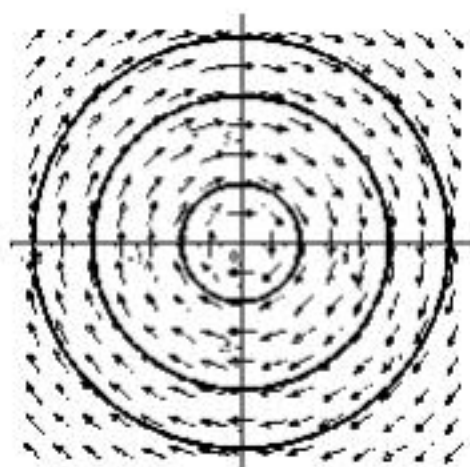
Berikut diberikan beberapa plot kurva trajektori di sekitar titik keseimbangan $(0, 0)$ untuk beberapa kasus.



Gambar 2.9 Kasus $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$



Gambar 2.10 Kasus $a_1 < 0$ dan $a_2 < 0$



Gambar 2.11 Kasus $a_1 = 0$ dan $a_2 > 0$

2.5 Linearisasi sistem di sekitar titik keseimbangan

Pertimbangkan sistem persamaan differensial autonomus nonlinear dimensi dua

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.20}$$

yang mempunyai titik keseimbangan (x_e, y_e) , yaitu memenuhi $f(x_e, y_e) = 0$ dan $g(x_e, y_e) = 0$. Untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan (x_e, y_e) , kita lanjutkan dengan memeriksa apa yang terjadi pada kurva solusi $(x(t), y(t))$ jika kurva solusi tersebut pada awalnya sangat dekat dengan titik keseimbangan (x_e, y_e) . Proses ini biasa disebut analisis

kestabilan linear atau linearisasi sistem di sekitar titik keseimbangan. Misalkan

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \varepsilon X(t) \\y(t) &= y_e + \varepsilon Y(t)\end{aligned}\tag{2.21}$$

dimana ε adalah suatu bilangan positif kecil. Nilai $\varepsilon X(t)$ dan $\varepsilon Y(t)$ dapat dinyatakan sebagai nilai pergeseran (*displacement*) $x(t)$ dan $y(t)$ dari titik keseimbangan (x_e, y_e) . Dengan mensubstitusikan persamaan (2.21) ke dalam persamaan (2.20) diperoleh

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dX}{dt} &= f(x_e + \varepsilon X(t), y_e + \varepsilon Y(t)) \\ \varepsilon \frac{dY}{dt} &= g(x_e + \varepsilon X(t), y_e + \varepsilon Y(t)).\end{aligned}$$

Dengan mengenakan ekspansi deret Taylor pada fungsi dua variabel di atas di sekitar titik keseimbangan (x_e, y_e) diperoleh

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dX}{dt} &= f(x_e, y_e) + \varepsilon X \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, y_e) + \varepsilon Y \frac{\partial f}{\partial y}(x_e, y_e) + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon \frac{dY}{dt} &= g(x_e, y_e) + \varepsilon X \frac{\partial g}{\partial x}(x_e, y_e) + \varepsilon Y \frac{\partial g}{\partial y}(x_e, y_e) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

Dengan asumsi bahwa nilai ε cukup kecil maka bentuk $O(\varepsilon^2)$ nilainya menjadi lebih kecil lagi. Dengan pertimbangan tersebut, bentuk $O(\varepsilon^2)$ dapat diabaikan. Selanjutnya, karena titik keseimbangan (x_e, y_e) memenuhi $f(x_e, y_e) = 0$ dan $g(x_e, y_e) = 0$, maka bentuk terakhir dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= X \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, y_e) + Y \frac{\partial f}{\partial y}(x_e, y_e) \\ \frac{dY}{dt} &= X \frac{\partial g}{\partial x}(x_e, y_e) + Y \frac{\partial g}{\partial y}(x_e, y_e).\end{aligned}$$

Sistem persamaan differensial linear di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_e, y_e)} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

yang mempunyai titik keseimbangan $(0, 0)$. Matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

disebut juga matriks Jacobi.

Sekarang pertimbangkan kembali sistem dimensi 2

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_1x + a_2y \\ \frac{dy}{dt} &= a_3x + a_4y\end{aligned}\tag{2.22}$$

dengan asumsi bahwa $a_1a_4 - a_2a_3 \neq 0$. Dengan asumsi tersebut maka titik $(0, 0)$ merupakan satu-satunya titik keseimbangan untuk sistem (2.22). Anggaplah bahwa sistem (2.22) adalah sistem persamaan differensial linear yang berpadanan dengan sistem persamaan differensial nonlinear (2.20) dengan titik

keseimbangan (x_e, y_e) . Selanjutnya analisis kestabilan titik keseimbangan (x_e, y_e) untuk sistem nonlinear (2.20) diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3 (Boyce dan DiPrima, 1992). Misalkan r_1 dan r_2 adalah nilai eigen dari sistem linear (2.22) yang bersesuaian dengan sistem nonlinear (2.20). Maka tipe dan kestabilan titik keseimbangan $(0, 0)$ dari sistem linear (2.22) dan titik keseimbangan (x_e, y_e) dari sistem nonlinear (2.20) diberikan pada Tabel 2.3.

Table 2.3 Sifat-sifat kestabilan pada sistem linear dan nonlinear

Nilai eigen	Sistem Linear		Sistem Nonlinear	
	Tipe	Kestabilan	Tipe	Kestabilan
$r_1 > r_2 > 0$	IN	Tidak Stabil	IN	Tidak Stabil
$r_1 < r_2 < 0$	IN	Stabil Asimptotik	IN	Stabil Asimptotik
$r_2 < 0 < r_1$	SP	Tidak Stabil	SP	Tidak Stabil
$r_1 = r_2 > 0$	PN atau IN	Tidak Stabil	PN, IN, atau SpP	Tidak Stabil
$r_1 = r_2 < 0$	PN	Stabil	PN,	Stabil

	atau IN	Asimptotik	IN, atau SpP	Asimptotik
$r_1, r_2 = \rho \pm i\omega$				
$\rho > 0$	SpP	Tidak Stabil	SpP	Tidak Stabil
$\rho < 0$	SpP	Stabil Asimptotik	SpP	Stabil Asimptotik
$\rho = 0$	C	Stabil	C atau SpP	Tak Tentu

IN, Node tidak sejati; PN, Node sejati; SP, Titik Pelana; SpP, Spiral; C, Pusat

Secara esensial, Teorema 2.3 menyatakan bahwa untuk suatu gangguan yang kecil, nilai bentuk nonlinear juga kecil dan tidak memengaruhi kestabilan dan tipe dari titik keseimbangan sebagaimana ditentukan oleh bentuk linear kecuali dalam dua kasus yaitu, (1) r_1 dan r_2 adalah bilangan kompleks murni dan (2) r_1 dan r_2 real dan bernilai sama. Analisis kestabilan lokal untuk titik keseimbangan (x_e, y_e) dari sistem nonlinear ekuivalen dengan analisis kestabilan titik keseimbangan $(0, 0)$ yang terisolasi untuk sistem linear.

2.8 Uji kestabilan Hurwitz

Pada bagian ini, suatu metode dipertimbangkan untuk menguji kestabilan titik keseimbangan dari sistem dinamik linear dengan koefisien konstan,

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2.23)$$

dengan x adalah matriks berukuran $n \times 1$ dan A adalah matriks berukuran $n \times n$.

Dari teorema dasar aljabar menyatakan bahwa suatu polinomial

$$f(r) = r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \dots + p_2r^2 + p_1r + p_0,$$

dengan $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ adalah konstanta real, mempunyai n akar, r_1, r_2, \dots, r_n . Masing-masing akar bernilai real atau mungkin bernilai kompleks yang memenuhi $f(r_i) = 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Dengan perkataan lain berlaku

$$f(r) = (r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n).$$

Nilai eigen dari matriks A merupakan akar-akar dari polinomial $f(r)$.

Uji kestabilan Hurwitz untuk titik keseimbangan $O = (0, 0, \dots, 0)$ pada sistem (2.23) tidak melibatkan perhitungan nilai eigen dari matriks A . Uji kestabilan Hurwitz menguji determinan dari matriks H_n yang disebut matriks Hurwitz. Entry-entry matriks Hurwitz nilainya hanya memuat $0, 1, p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. Matriks Hurwitz diberikan sebagai berikut.

$$H_1 = (p_{n-1}),$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} \\ 1 & p_{n-2} \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} \\ 1 & p_{n-2} & p_{n-4} \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} \end{pmatrix},$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & p_{n-7} \\ 1 & p_{n-2} & p_{n-4} & p_{n-6} \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} \\ 0 & 1 & p_{n-2} & p_{n-4} \end{pmatrix},$$

sampai matriks H_n . Disini nilai p_j didefinisikan bernilai 0 jika j bernilai negatif.

Teorema 2.4 Uji kestabilan Hurwitz (Willems, 1970; Jeffries, 1989). Misalkan sistem dinamik (2.23) mempunyai trajektori konstan $\mathbf{0}$. Setiap matriks Hurwitz mempunyai determinan dengan nilai positif jika dan hanya jika setiap bagian real dari nilai eigen matriks A bernilai negatif dan $\mathbf{0}$ merupakan suatu trajektori atraktor, yaitu titik keseimbangan $\mathbf{0}$ stabil asimptotik.

Untuk nilai n yang kecil, uji kestabilan Hurwitz menyatakan bahwa masing-masing matriks Hurwitz mempunyai determinan dengan nilai positif jika dan hanya jika, untuk

$$n = 1, \quad p_0 > 0;$$

$$n = 2, \quad p_0, p_1 > 0;$$

$$n = 3, \quad p_0, p_1, p_2 > 0, \quad p_2 p_1 - p_0 > 0;$$

$$n = 4, \quad p_0, p_1, p_2, p_3 > 0, \quad p_3 p_2 p_1 - p_1^2 - p_0 p_3^2 > 0.$$

Dengan demikian kestabilan titik keseimbangan $\mathbf{0}$ dapat diketahui dengan memperhatikan nilai-nilai koefisien dari persamaan karakteristik matriks A .

Contoh 2.6 Diberikan sistem dinamik

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -4x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + y.\end{aligned}$$

Dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

diperoleh persamaan karakteristik

$$f(r) = |A - rI| = r^2 + 3r + 2,$$

yang memberikan $p_0 = 2$ dan $p_1 = 3$. Dengan uji kestabilan Hurwitz disimpulkan bahwa titik keseimbangan $O = (0, 0)$ untuk sistem tersebut stabil asimptotik.

2.9 Soal latihan

1. Tentukan solusi analitik dari sistem persamaan differensial berikut

$$\frac{dx}{dt} = -x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + z$$

$$\frac{dz}{dt} = z.$$

2. Diberikan sistem persamaan differensial linear berikut

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases} \quad \text{dan} \quad (b) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Tentukan kestabilan titik keseimbangan $(0, 0)$ untuk kedua sistem di atas dan gambarkan pula kurva solusi di sekitar titik keseimbangan tersebut.

3. Diberikan sistem nonlinear

$$\frac{dx}{dt} = x(1,2 - 0,25x - 0,01y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-1,5 + 2,0x - 0,1y)$$

Tentukan semua titik keseimbangan nonnegatif $x \geq 0$, $y \geq 0$ untuk sistem tersebut. Selanjutnya tentukan pula jenis kestabilan untuk semua titik keseimbangan yang diperoleh dengan menggunakan metode linearisasi dan nilai eigen.

4. Diberikan sistem nonlinear

$$\frac{dx}{dt} = x(-x - y + 6)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(2x - z - 1)$$

$$\frac{dz}{dt} = y(2y - 2z - 2).$$

Tentukan semua titik keseimbangan nonnegatif $x \geq 0$, $y \geq 0$, dan $z \geq 0$ untuk sistem tersebut.

5. Linearisasi sistem pada soal 4 di sekitar semua titik keseimbangan yang telah diperoleh. Tentukan kestabilan semua titik keseimbangan dengan menggunakan uji kestabilan Hurwitz. Bandingkan pula hasil yang anda peroleh dengan memperhatikan nilai eigennya.

Bab 3

Model Pertumbuhan Satu Populasi

3.1 Pendahuluan

Dalam memodelkan dinamika populasi, ada banyak kendala yang ditemukan. Sebagai contoh, suatu populasi yang melibatkan sejumlah pohon dalam hutan atau suatu populasi hewan yang hidup dalam area tertentu sangat kompleks. Dinamika populasi tersebut dipengaruhi oleh banyak faktor yang sangat sulit bagi kita untuk menentukan faktor-faktor paling dominan yang memengaruhi dinamika populasi tersebut.

Dengan hanya memperhatikan faktor-faktor dominan yang memengaruhi dinamika populasi dan dengan memberikan beberapa asumsi maka perubahan ukuran populasi yang bergantung kepada waktu dapat dinyatakan dalam suatu model matematika. Model yang terbentuk menyatakan hubungan antara perubahan populasi dengan faktor yang memengaruhinya. Pertimbangkan satu populasi pada suatu daerah tertentu yang hanya terdiri atas satu spesies. Populasi seperti itu dapat merupakan populasi manusia, atau sejumlah pohon pinus dalam hutan, atau sejumlah ikan tertentu dalam suatu danau.

Perubahan ukuran populasi pada suatu daerah tertentu terjadi karena adanya kelahiran, kematian, imigrasi, ataupun emigrasi. Perubahan ukuran populasi tersebut tentulah bersifat diskrit. Tetapi jika ukuran populasi sangat besar, maka perubahan ukuran populasi sangat cepat dan dengan demikian perubahan populasi dapat dianggap sebagai suatu fungsi yang kontinu terhadap waktu.

3.2 Model diskrit populasi tunggal

Pada bagian ini akan dimodelkan suatu pertumbuhan populasi tunggal pada suatu daerah yang spesifik. Pada daerah tersebut hanya satu populasi yang menjadi perhatian dan populasi tersebut dianggap hanya meliputi satu spesies.

Misalkan $x(t)$ menyatakan ukuran populasi tersebut pada waktu t . Ukuran populasi $x(t)$ menyatakan banyaknya individu dalam populasi tersebut pada waktu t . Perubahan ukuran populasi yang diukur selama interval waktu Δt dinyatakan sebagai

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Rata-rata laju perubahan populasi selama interval waktu Δt merupakan laju perubahan populasi per individu dinyatakan sebagai $R(t)$ yaitu

$$R(t) = \frac{\Delta x}{x(t)\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{x(t)\Delta t} \quad (3.1)$$

Kuantitas $R(t)$ menyatakan angka pertumbuhan rata-rata pada interval $(t, t + \Delta t)$, yaitu laju pertumbuhan per unit waktu.

Persentase perubahan dalam populasi adalah $100 \Delta x / x(t) = 100 R(t) \Delta t$. Jadi seratus kali laju pertumbuhan $R(t)$ adalah persentase perubahan dalam populasi per unit waktu. Sebagai contoh, jika dalam setengah tahun populasi bertambah sebesar 20%, maka $R(t) = 2/5$ dan laju pertumbuhan populasi sebesar 40% per tahun.

Persamaan (3.1) belum cukup untuk dapat digunakan memprediksi ukuran populasi untuk masa yang akan datang. Tetapi jika laju pertumbuhan $R(t)$ dan ukuran populasi pada suatu waktu tertentu diketahui maka ukuran populasi selanjutnya dapat dihitung, yaitu

$$x(t + \Delta t) = x(t) + R(t)x(t)\Delta t. \quad (3.2)$$

Dengan asumsi bahwa perubahan populasi hanya disebabkan oleh adanya kelahiran dan kematian, faktor migrasi dan faktor lainnya dianggap tidak berpengaruh pada perubahan populasi, maka

$$x(t + \Delta t) = x(t) + b \Delta t x(t) + d \Delta t x(t),$$

dimana b dan d menyatakan laju kelahiran dan laju kematian per unit waktu yang diukur selama interval $(t, t + \Delta t)$. Dengan demikian diperoleh

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (b - d)\Delta t x(t). \quad (3.3)$$

Dari persamaan (3.2) dan (3.3) diperoleh laju pertumbuhan

$$R = b - d,$$

yaitu laju kelahiran dikurangi laju kematian. Disini, R menyatakan laju pertumbuhan populasi per individu. Untuk populasi secara total, maka laju kelahiran dan laju kematian yang ditinjau adalah rata-rata laju kelahiran dan rata-rata laju kematian. Dalam hal ini dianggap tidak ada perbedaan antara individu yang masih kecil dan individu yang sudah dewasa, yaitu populasi diasumsikan homogen.

Selanjutnya diasumsikan pula bahwa jumlah kelahiran dan jumlah kematian proporsional dengan ukuran populasi, maka laju pertumbuhan populasi $R(t)$ adalah konstan, yaitu $R(t) = r$. Laju pertumbuhan populasi diasumsikan tidak berubah dengan berubahnya waktu. Jika laju pertumbuhan populasi konstan, maka untuk sebarang waktu t diperoleh

$$x(t + \Delta t) - x(t) = r \Delta t x(t).$$

Bentuk di atas dapat dinyatakan dalam persamaan differensi untuk menggambarkan ukuran populasi untuk waktu yang akan datang yaitu

$$x(t + \Delta t) = (1 + r \Delta t)x(t). \quad (3.4)$$

Persamaan differensi (3.4) dapat diselesaikan jika ukuran populasi awal pada $t = t_0$, yaitu $x(t_0) = x_0$, diberikan. Dengan demikian ukuran populasi untuk waktu yang akan datang dengan mudah dapat dihitung. Ukuran populasi secara rekursif diberikan sebagai

$$x(t_0 + \Delta t) = (1 + r \Delta t)x_0,$$

$$x(t_0 + 2\Delta t) = (1 + r \Delta t)x(t_0 + \Delta t) = (1 + r \Delta t)^2 x_0,$$

$$x(t_0 + 3\Delta t) = (1 + r \Delta t)x(t_0 + 2\Delta t) = (1 + r \Delta t)^3 x_0$$

Dengan memisalkan $t = t_0 + m\Delta t$, maka diperoleh

$$x(t) = x(t_0 + m\Delta t) = (1 + r\Delta t)^m x_0,$$

yang ekuivalen dengan

$$x(t) = (1 + r\Delta t)^{(t-t_0)/\Delta t} x_0.$$

Jika laju kelahiran lebih besar dari laju kematian, yaitu $r > 0$, maka populasi akan bertambah. Jika $r < 0$, maka populasi akan berkurang secara terus menerus dan menuju ke nol. Jika $r = 0$, maka ukuran populasi akan tetap dan sama dengan ukuran populasi awal, yaitu $x(t) = x_0$ untuk setiap waktu t .

3.3 Model pertumbuhan eksponensial

Dari definisi laju pertumbuhan yang diberikan oleh persamaan (3.1), $R(t)$ secara umum bergantung kepada waktu. Laju kelahiran dan laju kematian secara umum bergantung kepada waktu. Laju kelahiran, laju kematian, dan laju pertumbuhan diukur dalam interval waktu tertentu. Dalam kasus ukuran suatu populasi cukup besar, maka perubahan populasi dapat terjadi setiap saat. Dengan demikian interval Δt yang sangat kecil dapat dipertimbangkan. Dengan pertimbangan interval Δt cukup kecil, maka laju pertumbuhan populasi sesaat $R(t)$ dapat didefinisikan sebagai

$$R(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{x(t)\Delta t} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt}. \quad (3.5)$$

Laju pertumbuhan $R(t)$ pada persamaan (3.5) menyatakan laju perubahan populasi per individu. Dengan definisi (3.5) ukuran populasi dapat didekati oleh suatu fungsi yang kontinu terhadap waktu dan fungsi tersebut diasumsikan terdiferensial terhadap waktu t . Dalam kasus ukuran populasi yang besar, maka perubahan populasi yang bersifat diskrit dapat didekati oleh suatu fungsi kontinu terhadap waktu. Dengan demikian, dari persamaan (3.5) diperoleh laju perubahan populasi sebagai

$$\frac{dx}{dt} = R(t)x.$$

Dengan asumsi bahwa laju pertumbuhan $R(t)$ konstan, yaitu $R(t) = r$, maka ukuran populasi pada waktu t dinyatakan oleh solusi dari persamaan differensial orde satu koefisien konstan

$$\frac{dx}{dt} = rx \tag{3.6}$$

yang memenuhi syarat awal $x(t_0) = x_0$. Solusi dari persamaan differensial dengan syarat awal $x(t_0) = x_0 > 0$ diberikan oleh

$$x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}. \tag{3.7}$$

Jika $r > 0$, maka untuk $t > t_0$ populasi bertumbuh secara eksponensial. Jika $r < 0$, maka untuk $t > t_0$ populasi akan berkurang secara eksponensial dan menuju ke nol untuk waktu yang lama. Jika $r = 0$, maka ukuran populasi untuk setiap waktu $t > t_0$ akan tetap dan sama dengan ukuran populasi awal, yaitu $x(t) = x_0$.

Dalam dinamika populasi, suatu hal yang biasa menjadi perhatian adalah menentukan waktu yang diperlukan oleh suatu populasi untuk menjadi dua kali lipatnya dari ukuran populasi yang ada. Lama waktu $t_1 - t_0$ yang diperlukan untuk menjadi dua kalinya, diperoleh dari persamaan (3.7) yaitu $x(t_1) = 2x(t_0)$, atau

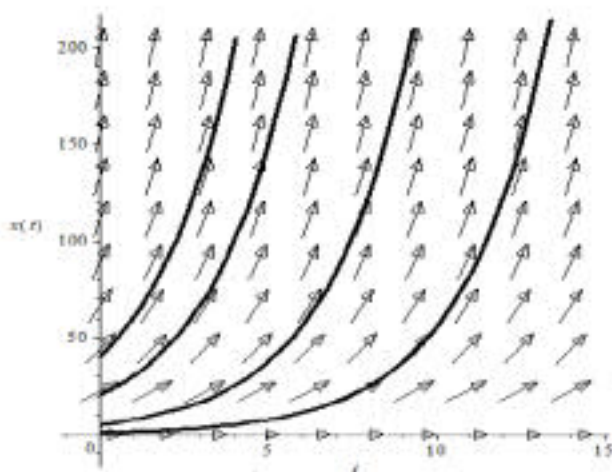
$$2x_0 = x_0 e^{r(t_1 - t_0)} .$$

Dengan demikian waktu yang diperlukan suatu populasi untuk menjadi dua kali lipatnya dengan $r > 0$ adalah

$$t_1 - t_0 = \frac{\ln 2}{r} .$$

Model (3.6) disebut juga model pertumbuhan Malthus yang menyatakan bahwa laju pertumbuhan populasi naik secara eksponensial, atau laju perubahan populasi pada waktu t proporsional dengan ukuran populasi pada waktu t . Model tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial autonomus.

Contoh 3.1 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.6) dengan nilai parameter $r = 0.4$. Dengan berbagai nilai awal populasi $x(0) = 1, 5, 20$, dan 40 , maka diperoleh grafik kurva solusi yang menyatakan ukuran populasi pada waktu t seperti diberikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Grafik kurva solusi dari model pertumbuhan eksponensial.

3.4 Model eksponensial dengan laju pemanenan konstan

Dengan anggapan bahwa populasi yang ditinjau bernilai ekonomi, sebagai contoh populasi ikan, dan selanjutnya populasi dieksploitasi. Disini, diasumsikan populasi dipanen dengan laju pemanenan konstan, yaitu laju tangkapan konstan untuk setiap waktu. Dengan asumsi tersebut maka laju perubahan satu populasi menjadi

$$\frac{dx}{dt} = rx - H \quad (3.8)$$

dimana H menyatakan laju pemanenan konstan yang diasumsikan bernilai positif.

Perhatikan bahwa model (3.8) hanya mempunyai satu titik keseimbangan, yaitu $x = \frac{H}{r}$. Solusi dari model (3.8) dengan nilai awal $x(0) = x_0 > 0$ adalah

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{H}{r}\right) e^{rt} + \frac{H}{r}. \quad (3.9)$$

Grafik dari solusi (3.9) naik secara eksponensial dan menuju ke tak berhingga untuk t menuju ke tak berhingga jika $x_0 > \frac{H}{r}$.

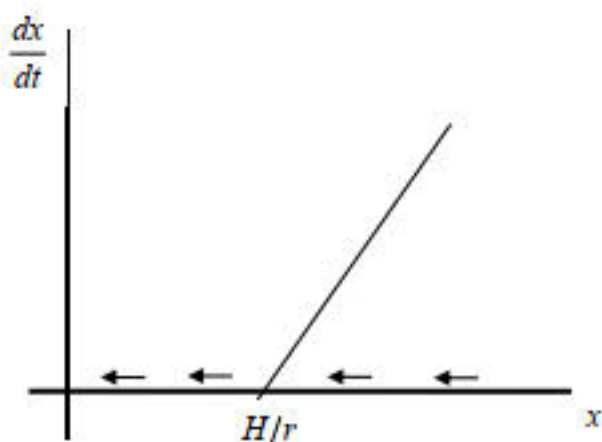
Jika $x_0 < \frac{H}{r}$, kurva solusi menurun dan mencapai nol pada saat

$t = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{H}{H - rx_0}\right)$. Sementara dalam kasus $x_0 = \frac{H}{r}$, maka

kurva solusi bernilai konstan, yaitu $x(t) = \frac{H}{r}$ untuk setiap t .

Dalam hal ini ukuran populasi akan tetap sama dengan ukuran populasi awal yang sama dengan titik keseimbangannya.

Dari model (3.8) diketahui bahwa jika $x > \frac{H}{r}$ maka $\frac{dx}{dt} > 0$ dan jika $x < \frac{H}{r}$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$. Dengan demikian titik keseimbangan $x = \frac{H}{r}$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil. Hal ini diilustrasikan pada Gambar 3.2.

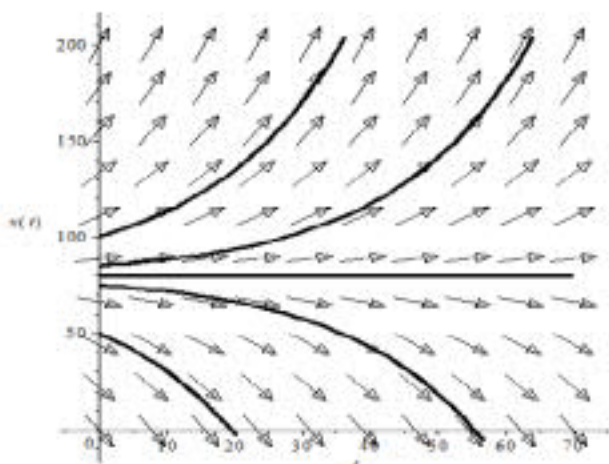


Gambar 3.2 Fungsi laju pertumbuhan $\frac{dx}{dt} = rx - H$.

Gambar 3.2 menyatakan bahwa jika ukuran populasi pada awalnya lebih besar dari populasi seimbangannya, maka populasi akan menuju ke populasi seimbangannya. Tetapi jika ukuran populasi pada awalnya lebih kecil dari populasi seimbangannya, maka populasi tersebut akan menjauhi populasi keseimbangannya dan pada suatu saat populasi akan bernilai nol. Kepunahan populasi sangat bergantung kepada besaran laju pemanenan yang dikenakan kepada populasi, laju pertumbuhan intrinsik populasi, dan ukuran populasi awal. Populasi tidak akan punah jika laju pemanenan dikontrol dengan nilai $H \leq rx_0$.

Contoh 3.2 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.8) dengan nilai parameter $r = 0.05$

dan $H = 4$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik keseimbangan $x = 80$. Dengan berbagai nilai awal populasi $x(0) = 50, 75, 80$, dan 85 , maka diperoleh grafik kurva solusi yang menyatakan ukuran populasi pada waktu t seperti diberikan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Beberapa kurva solusi untuk model (3.8).

Dari Gambar 3.3 diketahui bahwa jika populasi awal lebih besar daripada posisi keseimbangannya, yaitu $H < rx_0$, maka populasi tetap akan bertumbuh secara eksponensial. Tetapi jika populasi awal lebih kecil dari pada posisi keseimbangannya, yaitu $H > rx_0$, maka populasi berkurang dan suatu waktu akan mencapai nilai nol.

3.5 Model eksponensial dengan usaha pemanenan konstan

Pada bagian ini, model (3.6) dikenakan pemanenan dengan usaha pemanenan konstan, yaitu laju pemanenan proporsional dengan ukuran populasi. Dengan asumsi tersebut, model (3.6) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = rx - Ex \quad (3.10)$$

dimana E adalah suatu konstanta positif yang menyatakan usaha pemanenan.

Dengan memisalkan $r_1 = r - E$, model (3.10) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x \quad (3.11)$$

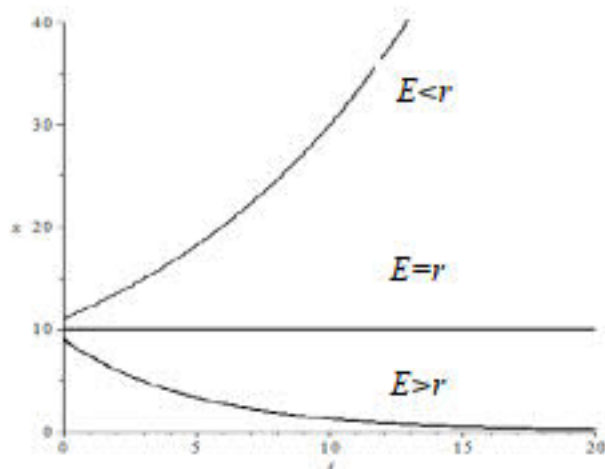
Solusi dari model (3.7) bersama dengan syarat awal $x(0) = x_0 > 0$ diberikan oleh

$$x(t) = x_0 e^{(r-E)t}. \quad (3.12)$$

Dalam kasus usaha pemanenan lebih kecil daripada laju intrinsik populasi, yaitu $E < r$, maka solusi (3.12) serupa dengan solusi (3.7). Jika $E = r$, maka $x(t) = x_0$. Hal ini bermakna bahwa ukuran populasi pada level x_0 untuk setiap waktu t . Tetapi jika $E > r$, populasi akan berkurang secara eksponensial dan menuju ke nilai nol untuk waktu yang lama.

Contoh 3.3 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.10) dengan nilai parameter $r = 2$.

Dengan nilai $x(0)=10$ dan $E=2$, $x(0)=11$ dan $E=1,9$, serta $x(0)=9$ dan $E=2,2$, diperoleh kurva solusi seperti diberikan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Beberapa tipe kurva solusi model (3.10) untuk $E < r$, $E = r$, dan $E > r$.

3.6 Model pertumbuhan bergantung pada kepadatan populasi

Pada model pertumbuhan eksponensial, yaitu model populasi dengan laju pertumbuhan konstan, populasi bertumbuh secara eksponensial tanpa batas. Model pertumbuhan eksponensial ini nampaknya cukup akurat pada saat ukuran populasi masih kecil dan makanan yang tersedia cukup berlimpah. Begitu ukuran populasi mulai membesar dan pada saat itu makanan tidak lagi tersedia secara memadai, maka populasi tidak mungkin lagi dapat bertumbuh secara maksimal.

T.R. Malthus pada 1798 menyatakan bahwa meskipun populasi dapat bertumbuh secara eksponensial tetapi makanannya biasanya naik menurut deret aritmetika sehingga pertumbuhan populasi akan terbatas. Keterbatasan makanan, kekurangan tempat atau akumulasi racun pada lingkungan menyebabkan laju kematian meningkat atau menurunkan tingkat reproduksi. Keterbatasan sumber daya alam seperti itu akan menghambat populasi untuk terus meningkat.

Ketika suatu populasi bertumbuh cukup besar maka pada saat itu spesies dalam populasi tersebut mulai berkompetisi dengan spesies lainnya. Demikian juga individu dalam satu spesies mulai berkompetisi dengan individu lainnya untuk mendapatkan makanan, tempat, ataupun sumber daya lainnya. Dalam eksperimen di laboratorium telah dibuktikan bahwa makanan yang terbatas untuk menyokong populasi yang besar dapat membatasi pertumbuhan populasi.

Peningkatan kepadatan populasi akan menyebabkan laju kelahiran menurun dan laju kematian meningkat. Pada kondisi tertentu dapat terjadi laju kelahiran sama dengan laju kematian yang mengakibatkan populasi tidak lagi bertumbuh. Pada saat itu jumlah kematian sama dengan jumlah kelahiran.

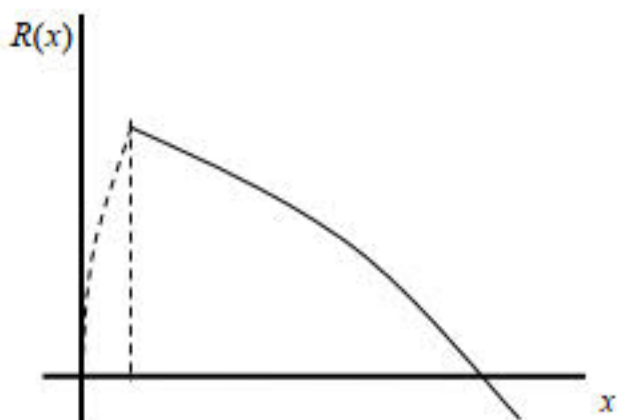
Secara umum laju pertumbuhan populasi per individu, $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$, tidak selalu konstan. Laju pertumbuhan setiap individu mungkin bergantung kepada ukuran populasi. Dengan itu laju pertumbuhan dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = R(x) \quad \text{atau} \quad \frac{dx}{dt} = xR(x). \quad (3.13)$$

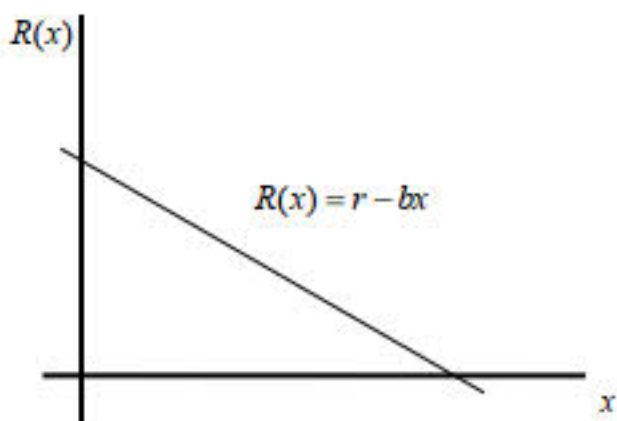
Untuk mengetahui hubungan antara $R(x)$ dengan ukuran populasi x , kita asumsikan ukuran populasi cukup besar dan dengan itu $R(x)$ dipandang sebagai suatu fungsi yang kontinu terhadap x . Ketika ukuran populasi masih kecil maka laju pertumbuhan akan cepat naik. Setelah sampai pada ukuran populasi tertentu, laju pertumbuhan tidak dapat lagi bertambah. Pada saat ukuran populasi sudah mulai besar maka laju pertumbuhan menurun dengan membesarnya ukuran populasi. Sampai suatu ukuran populasi tertentu, laju pertumbuhan populasi bernilai nol dan selanjutnya mungkin negatif.

Dalam kondisi kepadatan populasi yang moderat (tidak terlalu besar), maka laju pertumbuhan cukup besar. Dengan meningkatnya kepadatan populasi, maka laju pertumbuhan akan menurun. Dengan demikian terdapat suatu kepadatan maksimal suatu populasi dimana laju pertumbuhan populasi bernilai nol, yaitu kondisi populasi tidak lagi bertambah. Ketika kepadatan melampaui kepadatan maksimalnya maka populasi akan berkurang. Fenomena ini menyatakan hubungan antara kepadatan populasi dengan laju pertumbuhannya, seperti dalam sketsa pada Gambar 3.5.

Dengan memperhatikan fenomena hubungan antara laju pertumbuhan dengan kepadatan populasi, maka diperoleh suatu hubungan fungsional yang menggambarkan bahwa $R(x)$ suatu fungsi kontinu yang monoton turun dan akan memotong sumbu x pada titik tertentu. Fungsi $R(x)$ yang sederhana yang dapat digunakan adalah $R(x) = r - bx$ yaitu suatu garis lurus, seperti diberikan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.5 Hubungan antara laju pertumbuhan dengan kepadatan populasi



Gambar 3.6 Grafik laju pertumbuhan logistik

Verhulst pada 1830 dan Pearl dan Reed pada 1920 telah mengemukakan suatu model sederhana yang menyatakan hubungan antara $R(x)$ dan x . Mereka menyatakan bahwa laju pertumbuhan dipengaruhi oleh laju pertumbuhan dan tanpa pengaruh lingkungan dilambangkan sebagai bilangan positif r . Pengaruh bertambahnya kepadatan populasi terhadap laju pertumbuhan dilambangkan dengan bilangan positif b .

Dengan memperhatikan pengaruh kepadatan populasi terhadap laju pertumbuhan dan dengan menyatakan hubungan $R(x) = r - bx$, maka model (3.13) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = x(r - bx). \quad (3.14)$$

Dengan memisalkan $b = r/K$, maka model (3.14) dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right). \quad (3.15)$$

Model laju pertumbuhan (3.15) disebut juga model logistik. Persamaan logistik pertama-tama diusulkan oleh P. V. Verhulst pada 1838 sebagai model pertumbuhan populasi. Konstanta r , yang diasumsikan positif, disebut laju pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth rate*) karena nilai laju pertumbuhan mendekati nilai r ketika ukuran populasi x kecil. Konstanta positif K biasa dinyatakan sebagai daya dukung (*carrying capacity*) lingkungan, yaitu ukuran populasi maksimal yang dapat ditampung dengan baik oleh lingkungan dimana populasi tersebut hidup. Ukuran populasi sebesar K kadang-kadang juga disebut level kejenuhan (*saturation level*) karena pada kondisi

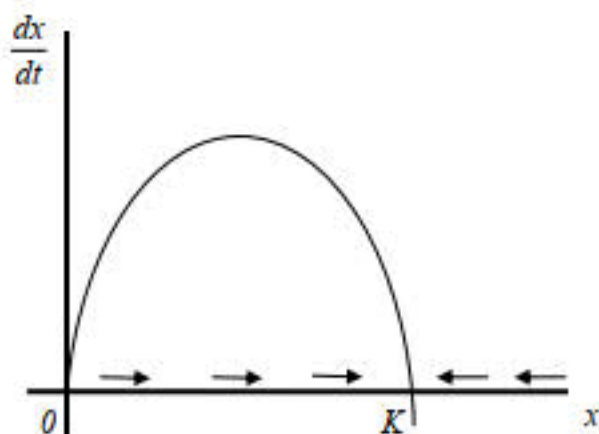
dimana ukuran populasi besar maka jumlah kematian lebih besar dari jumlah kelahiran.

Model logistik (3.15) mempunyai dua titik keseimbangan nonnegatif, yaitu $x = 0$ dan $x = K$. Jika $0 < x < K$ maka $\frac{dx}{dt} > 0$ dan jika $x > K$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$. Hal ini bermakna titik keseimbangan K merupakan titik keseimbangan yang stabil. Titik keseimbangan ini stabil asimptotik dan global untuk $x > 0$, yaitu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K, \text{ untuk } x(0) > 0.$$

Jika ukuran populasi pada awalnya kurang dari titik keseimbangan K , maka $x(t)$ bertumbuh terus menerus, tetapi ia tidak pernah mencapai titik keseimbangan K . Ukuran populasi hanya mendekati nilai K bilamana t mendekati tak berhingga. Jika ukuran populasi pada awalnya lebih besar dari pada titik keseimbangan K , maka $x(t)$ berkurang terus menerus menuju ke titik keseimbangan K , lihat Gambar 3.7.

Gambar 3.7 menunjukkan fungsi pertumbuhan $F(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ dan garis berarah menyatakan arah pertumbuhan $x(t)$ dengan bertambahnya t . Jika $0 < x(0) < K$, maka $x(t)$ menuju ke nilai K . Demikian juga jika $x(0) > K$, maka $x(t)$ juga menuju ke nilai K . Jika $x(0) = K$, maka $x(t) = K$ untuk setiap t . Hal ini menunjukkan bahwa jika ukuran populasi pada awalnya bernilai positif, maka ukuran populasi akan menuju ke nilai seimbangannya.



Gambar 3.7 Bidang fase untuk model logistik

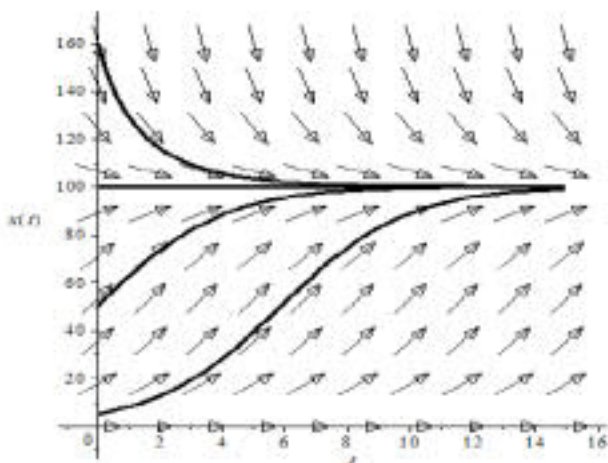
Model logistik yang merupakan persamaan differensial orde satu koefisien konstan dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Solusi dari model (3.15) bersama dengan syarat awal $x(0) = x_0 > 0$, dapat dituliskan dalam bentuk

$$x(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}, \quad (3.16)$$

dimana $c = \frac{K - x_0}{x_0}$. Dari solusi (3.16) diketahui bahwa untuk t mendekati tak berhingga, maka $x(t)$ mendekati nilai K .

Contoh 3.4 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.15) dengan nilai parameter $r = 0,5$ dan $K = 100$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik

keseimbangan $x = 0$ dan $x = 100$. Dengan berbagai nilai awal populasi $x(0) = 5, 50, 100,$ dan 160 , maka diperoleh grafik kurva solusi yang menyatakan ukuran populasi pada waktu t seperti diberikan pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Kurva solusi model logistik

Gambar 3.8 memberikan ilustrasi medan vektor dan bentuk-bentuk kurva solusi $x(t)$. Kurva solusi mendekati titik keseimbangan $x = 100$ dari atas dan dari bawah titik keseimbangan. Kurva di bawah nilai keseimbangan yang berbentuk *ogive* atau berbentuk huruf S disebut kurva logistik.

Agnew (1979) menyatakan bahwa fungsi logistik digunakan oleh Schaefer untuk menganalisis halibut Pasifik (*Pacific halibut*) dan industri perikanan ikan tuna (*yellow fin tuna*). Schaefer juga menyatakan bahwa parameter dari model logistik dapat diestimasi dari data hasil tangkapan dan data tangkapan per unit usaha. Haberman (1998) menyatakan bahwa

dalam eksperimen di laboratorium, pertumbuhan ragi (*yeast*) di dalam suatu kultur dan pertumbuhan paramesium mengindikasikan adanya kecocokan yang baik secara kuantitatif dengan kurva logistik.

Pertimbangkan suatu eksperimen pertumbuhan *yeast* (ragi) dalam suatu media terhadap waktu (Giordano et. al., 2003), lihat Tabel 3.1. Dari data observasi dan plot data diketahui bahwa perubahan populasi dari jam ke jam mengecil yang disebabkan keterbatasan makanan yang menjadi kendala dalam eksperimen. Dari data ini dapat dilakukan suatu nilai pendekatan untuk ukuran populasi maksimal sebesar 665. Plot data pada Gambar 3.8 tidak pernah mencapai nilai 665, namun nilai ukuran populasi mendekati ke nilai tersebut untuk waktu yang cukup lama. Dengan itu diusulkan suatu model

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = k(665 - x_n)x_n.$$

Tabel 3.1 Data pertumbuhan *yeast*

Waktu (jam)	Data observasi	Estimasi (model)	Kesalahan (%)
0	9,6	10,18	6,08
1	18,3	17,23	-5,85
2	29,0	28,94	-0,22
3	47,2	48,01	1,71
4	71,1	78,10	9,85
5	119,1	123,30	3,53
6	174,6	186,34	6,73
7	257,3	265,80	3,30

8	350,7	354,08	0,96
9	441,0	439,41	-0,36
10	513,3	511,47	-0,36
11	559,7	565,72	1,07
12	594,8	603,11	1,40
13	629,4	627,36	-0,32
14	640,8	642,46	0,26
15	651,1	651,64	0,08
16	655,9	657,12	0,19
17	659,6	660,37	0,12
18	661,8	662,29	0,07

Dengan memperhatikan hubungan antara data Δx_n dan $(665 - x_n)x_n$, diperoleh suatu nilai estimasi $k = 0,0008316$ dan dengan itu diperoleh

$$x_{n+1} = x_n + 0,0008316(665 - x_n)x_n.$$

Rumus persamaan differensi di atas dapat digunakan untuk memprediksi ukuran populasi pada waktu yang akan datang.

Dengan memperhatikan hubungan antara ukuran populasi dan waktu (mengikuti bentuk S) dan dengan membuat asumsi yang sesuai, maka diperoleh suatu hubungan fungsional antara laju pertumbuhan populasi *yeast* dan waktu dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial

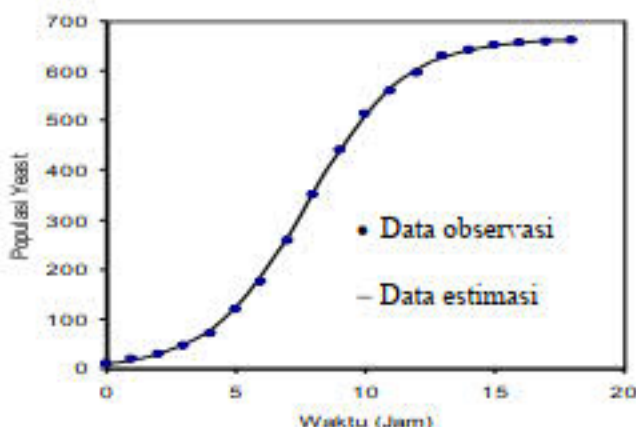
$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)(1 - x(t) / K),$$

yang merupakan model pertumbuhan logistik (model Verhulst).

Dengan menggunakan data pada Tabel 3.1, nilai parameter r dan K dapat diestimasi dan diperoleh nilai estimasi $r = 0.000798045$ dan $K = 665$. Dengan mempertimbangkan waktu yang dibutuhkan oleh populasi untuk menjadi dua kali lipat, diperoleh solusi model

$$x(t) = \frac{665}{1 + 64.3026e^{-0.5307t}}$$

yang menyatakan ukuran populasi *yeast* pada setiap waktu. Nilai estimasi ukuran populasi *yeast* dengan menggunakan model ini diberikan pada Tabel 3.1 dan Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Plot data pertumbuhan *yeast* dan nilai prediksi model

Dari Gambar 3.9 diketahui bahwa data observasi dan estimasi ukuran populasi *yeast* mengikuti pola yang sama

dengan nilai yang kesalahan yang cukup kecil. Dengan itu dapat dikatakan bahwa model pertumbuhan populasi yang terhasil dapat digunakan untuk memprediksi ukuran populasi *yeast* untuk beberapa jam kemudian.

3.7 Model logistik dengan laju pemanenan konstan

Pada bagian ini populasi dengan model pertumbuhan mengikuti model logistik dipertimbangkan untuk dikenakan pemanenan dengan laju pemanenan konstan. Dengan pertimbangan tersebut model (3.15) dikembangkan menjadi

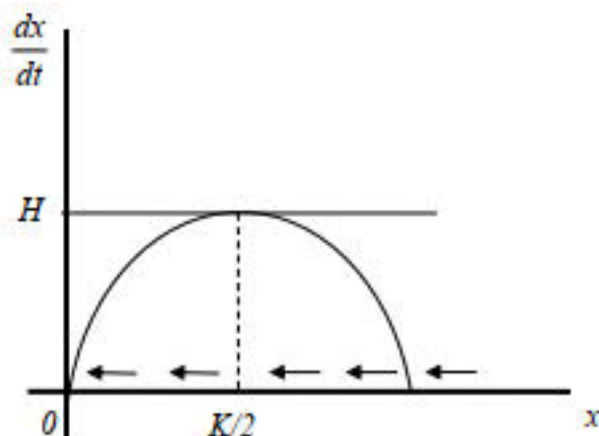
$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - H. \quad (3.17)$$

Beberapa kasus yang akan ditinjau berkaitan dengan kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan model (3.17).

Kasus 1 $H = \frac{Kr}{4}$

Dalam kasus ini, model (3.17) hanya mempunyai satu titik keseimbangan, yaitu $x = \frac{K}{2}$. Jika $x > \frac{K}{2}$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$ dan jika $x < \frac{K}{2}$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$. Dengan demikian titik keseimbangan $x = \frac{K}{2}$ merupakan titik keseimbangan yang semi stabil dalam pengertian bahwa untuk $x(0) > \frac{K}{2}$ maka $x(t)$ mendekati titik

$x = \frac{K}{2}$ bilamana t mendekati tak berhingga. Untuk $x(0) < \frac{K}{2}$ maka $x(t)$ selanjutnya menjauhi titik $x = \frac{K}{2}$, lihat Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Bidang fase model logistik dengan $H = \frac{rK}{4}$

Gambar 3.10 menyatakan fungsi pertumbuhan $F(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - H$. Arah panah memberikan indikasi arah perubahan $x(t)$ dengan meningkatnya t . Titik keseimbangan $x = \frac{K}{2}$ yang semi stabil sebenarnya tidak stabil karena jika $x(0) < \frac{K}{2}$ mengakibatkan $x(t)$ selanjutnya menjauhi titik

$x = \frac{K}{2}$, yaitu ada trajektori yang menjauhi titik keseimbangan tersebut.

Model (3.17) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{K} \left(x^2 - Kx + \frac{HK}{r} \right) = -\frac{r}{K} \left(x - \frac{K}{2} \right)^2. \quad (3.18)$$

Karena variabel-variabel dapat dipisahkan, maka persamaan (3.18) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx}{(x - x_s)^2} = -b dt,$$

dimana $x_s = \frac{K}{2}$ dan $b = \frac{r}{K}$.

Dengan mengintegalkan kedua ruas diperoleh

$$-\frac{1}{(x - x_s)} = -bt + c.$$

Selanjutnya diperoleh

$$x = x_s + \frac{1}{(bt - c)},$$

dimana c adalah konstanta integrasi. Dengan mengambil nilai awal $x(0) = x_0$ diperoleh

$$x_0 = x_s - \frac{1}{c} \text{ atau } c = \frac{1}{(x_s - x_0)}.$$

Dengan demikian solusi dari persamaan differensial (3.18) dengan syarat awal $x(0) = x_0$ diberikan oleh

$$x(t) = x_* + \frac{(x_* - x_0)}{(x_* - x_0)bt - 1}. \quad (3.19)$$

Untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan $x_* = \frac{K}{2}$, kita mengamati perilaku kurva solusi $x(t)$ untuk beberapa nilai awal di sekitar titik $x_* = \frac{K}{2}$, yaitu $x_0 > x_*$ dan $x_0 < x_*$. Jika $x_0 > x_*$, maka dari persamaan (3.19) diperoleh

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(x_* + \frac{(x_* - x_0)}{(x_* - x_0)bt - 1} \right) = x_*. \quad (3.20)$$

Untuk kasus $x_0 < x_*$, persamaan (3.19) dinyatakan dalam bentuk

$$x(t) = \frac{x_*(x_0 - x_*)bt + x_0}{(x_0 - x_*)bt + 1}. \quad (3.21)$$

Pembilang dan penyebut pada persamaan (3.21) kedua-duanya pada awalnya bernilai positif, tetapi pembilang mendekati nol jika

$$t \rightarrow t_1 = \frac{2x_0}{r(x_* - x_0)},$$

dan penyebutnya mendekati nol jika

$$t \rightarrow t_2 = \frac{1}{b(x_* - x_0)}, \text{ dengan } t_1 < t_2.$$

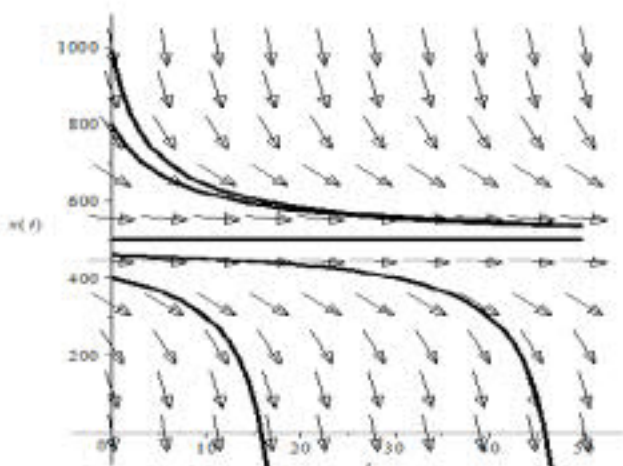
Dengan demikian diperoleh

$$x(t) = \frac{x_*(x_* - x_0)bt - x_0}{(x_* - x_0)bt - 1} = 0 \text{ untuk } t = t_1$$

dan

$$\lim_{t \rightarrow t_2^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_2^-} \left(\frac{x_0(x_0 - x_0)bt - x_0}{(x_0 - x_0)bt - 1} \right) = -\infty. \quad (3.22)$$

Contoh 3.5 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.17) dengan nilai parameter $r = 0,5$, $K = 1.000$, dan $H = 125$. Laju pemanenan yang diberikan memenuhi kasus 1. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik keseimbangan $x = 500$. Dengan berbagai nilai awal populasi $x(0) = 400, 460, 500, 800,$ dan 990 , maka diperoleh grafik kurva solusi yang menyatakan ukuran populasi pada waktu t seperti diberikan pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Kurva solusi untuk model (3.17)

$$\text{dengan } H = \frac{Kr}{4}$$

Dari Gambar 3.11 diketahui bahwa jika nilai ukuran populasi awal yang diberikan lebih besar daripada titik keseimbangannya, maka ukuran populasi monoton turun dan akan menuju ke nilai keseimbangannya. Tetapi ketika nilai awal populasi berada di bawah titik keseimbangannya, maka populasi monoton turun dan pada waktu tertentu akan mencapai nilai nol. Dengan demikian titik keseimbangan tersebut tidak stabil. Dalam kasus level pemanenan $H = \frac{Kr}{4}$ dan $x_0 < \frac{K}{2}$, maka populasi akan punah untuk suatu waktu tertentu.

Kasis 2 $H < \frac{Kr}{4}$.

Dalam kasus ini, model (3.17) mempunyai dua titik keseimbangan, yaitu

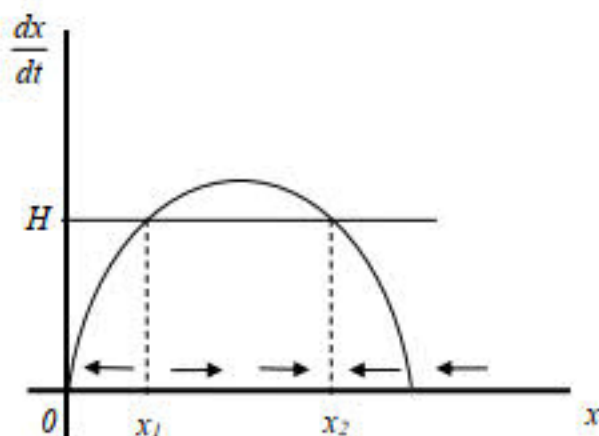
$$x = x_1 = \frac{K - K^*}{2} \text{ dan } x = x_2 = \frac{K + K^*}{2},$$

dimana $K^* = \sqrt{K^2 - \frac{4HK}{r}}$, dengan sifat $x_2 > x_1 > 0$.

Selanjutnya diketahui bahwa jika $x < x_1$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$, jika

$x_1 < x < x_2$ maka $\frac{dx}{dt} > 0$, dan jika $x_2 > x$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$.

Dengan memperhatikan nilai dari perubahan tersebut, maka diperoleh titik $x = x_1$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil dan titik $x = x_2$ merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik.



Gambar 3.12 Bidang fase model logistik dengan

$$0 < H < \frac{rK}{4}$$

Dalam kasus ini, model (3.17) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{K} \left(x^2 - Kx + \frac{HK}{r} \right) = -\frac{r}{K} (x - x_1)(x - x_2). \quad (3.23)$$

Karena persamaan differensial (3.23) merupakan persamaan differensial dengan variabel dapat dipisah, maka ia dapat ditulis

$$\frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = -\frac{K}{r} dt.$$

Dengan mengintegalkan kedua ruas diperoleh

$$-\frac{1}{(x_2 - x_1)} \ln(x - x_1) + \frac{1}{(x_2 - x_1)} \ln(x - x_2) = -\frac{K}{r} t + c_1,$$

atau

$$\ln\left(\frac{x-x_2}{x-x_1}\right) = -Bt + c_2,$$

dimana $B = \frac{K}{r}(x_2 - x_1)$ dan $c_2 = c_1(x_2 - x_1)$. Persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\left(\frac{x-x_2}{x-x_1}\right) = c e^{-Bt}, \text{ dimana } c = e^{c_2}.$$

Bentuk terakhir ini dapat ditulis sebagai

$$x = \frac{x_2 - cx_1 e^{-Bt}}{1 - c e^{-Bt}}.$$

Dengan mengambil syarat awal $x(0) = x_0$, diperoleh

$$x_0 = \frac{x_2 - cx_1}{1 - c} \text{ atau } c = \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1}.$$

Dengan demikian solusi dari persamaan differensial (3.23) dengan syarat awal $x(0) = x_0$ diberikan oleh

$$x(t) = \frac{x_2(x_0 - x_1) - x_1(x_0 - x_2)e^{-Bt}}{(x_0 - x_1) - (x_0 - x_2)e^{-Bt}}. \quad (3.24)$$

Untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan $x = x_1$ dan $x = x_2$, kita akan menganalisis perilaku kurva solusi $x(t)$ dengan beberapa nilai awal x_0 untuk $x_0 > x_2$, $x_1 < x_0 < x_2$, dan $x_0 < x_1$. Jika $x_0 > x_2$, maka untuk t menuju ke tak berhingga, solusi (3.24) dapat ditulis sebagai

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{x_2(x_0 - x_1) - x_1(x_0 - x_2)e^{-Bt}}{(x_0 - x_1) - (x_0 - x_2)e^{-Bt}} \right) = x_2. \quad (3.25)$$

Jika $x_1 < x_0 < x_2$, solusi (3.24) ditulis dalam bentuk

$$x(t) = \frac{x_2(x_0 - x_1) + x_1(x_2 - x_0)e^{-Bt}}{(x_0 - x_1) + (x_2 - x_0)e^{-Bt}},$$

dan untuk t menuju ke tak berhingga diperoleh

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{x_2(x_0 - x_1) - x_1(x_0 - x_2)e^{-Bt}}{(x_0 - x_1) - (x_0 - x_2)e^{-Bt}} \right) = x_2. \quad (3.26)$$

Jika $x_0 < x_1$, solusi (3.24) ditulis dalam bentuk

$$x(t) = \frac{x_1(x_2 - x_0)e^{-Bt} - x_2(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)e^{-Bt} - (x_1 - x_0)}. \quad (3.27)$$

Penyebut dan pembilang pada solusi (3.27) pada awalnya bernilai positif, tetapi penyebut menuju ke nol jika

$$t \rightarrow t_* = \frac{1}{B} \ln \left(\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right),$$

dan pembilang mendekati nol jika

$$t \rightarrow t_1 = \frac{1}{B} \ln \left(\frac{x_1(x_2 - x_0)}{x_2(x_1 - x_0)} \right), \text{ dimana } t_1 < t_*.$$

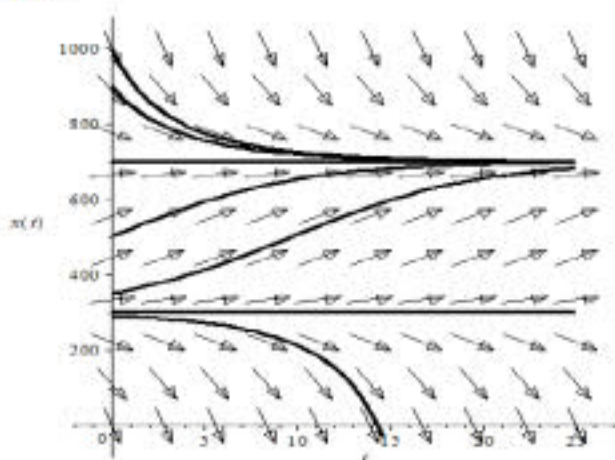
Dengan demikian diperoleh

$$x(t) = \frac{x_2(x_0 - x_1) - x_1(x_0 - x_2)e^{-Bt}}{(x_0 - x_1) - (x_0 - x_2)e^{-Bt}} = 0,$$

untuk $t = t_1 = \frac{1}{B} \ln \left(\frac{x_1(x_2 - x_0)}{x_2(x_1 - x_0)} \right)$, dan

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \left(\frac{x_2(x_0 - x_1) - x_1(x_0 - x_2)e^{-Bt}}{(x_0 - x_1) - (x_0 - x_2)e^{-Bt}} \right) = -\infty. \quad (3.28)$$

Contoh 3.6 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.17) dengan nilai parameter $r = 0,5$, $K = 1.000$, dan $H = 105$. Laju pemanenan yang diberikan memenuhi kasus 2. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh dua titik keseimbangan yaitu $x_1 = 300$ dan $x_2 = 700$. Dengan berbagai nilai awal populasi $x(0) = 290, 300, 350, 500, 700, 900$, dan 1.000 , maka diperoleh grafik kurva solusi yang menyatakan ukuran populasi pada waktu t seperti diberikan pada Gambar 3.13.



Gambar 3.13 Kurva solusi untuk model (3.17) dengan $0 < H < \frac{rK}{4}$

Dari Gambar 3.13 jelas bahwa jika $x_0 < 300$ maka kurva solusi monoton turun dan bernilai nol untuk suatu waktu tertentu. Jika $300 < x_0 < 700$, maka kurva solusi monoton naik dan konvergen ke nilai $x = 700$. Jika $x_0 > 700$, maka kurva solusi monoton turun dan konvergen ke nilai $x = 700$. Dengan itu, jelas bahwa titik keseimbangan $x = 700$ stabil asimptotik, sementara titik keseimbangan $x = 300$ tidak stabil.

Kepunahan populasi akibat adanya pemanenan dengan laju konstan tidak hanya disebabkan oleh tingginya laju pemanenan tetapi juga disebabkan oleh kondisi awal populasi. Jika populasi awal diketahui, maka dapat ditentukan laju pemanenan yang diperbolehkan sehingga populasi tidak akan punah meskipun dipanen dengan laju pemanenan konstan.

Dalam kasus $H < \frac{Kr}{4}$, maka diperoleh dua titik keseimbangan, yaitu $x_1 = \frac{K}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4H}{rK}} \right)$ dan

$x_2 = \frac{K}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4H}{rK}} \right)$. Jika diketahui nilai x_0 maka dapat

ditentukan nilai H minimal sehingga dengan nilai pemanenan yang diberikan tersebut ukuran populasi konvergen ke titik keseimbangan $x = x_2$, yang bermakna bahwa populasi tidak akan punah akibat pemanenan.

Supaya populasi konvergen ke titik keseimbangan $x = x_2$, maka $x_0 > x_1$, yaitu

$$\frac{K}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4H}{rK}} \right) < x_0,$$

$$1 - \frac{2x_0}{K} < \sqrt{1 - \frac{4H}{rK}}.$$

Jika $x_0 \geq \frac{K}{2}$, maka pilih $H < \frac{rK}{4}$.

Jika $x_0 < \frac{K}{2}$, pertidaksamaan di atas dapat ditulis

$$\left(1 - \frac{2x_0}{K} \right)^2 < 1 - \frac{4H}{rK}.$$

Dengan itu diperoleh $H < rx_0 \left(1 - \frac{x_0}{K} \right)$.

Contoh 3.7 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.17) dengan nilai parameter $r = 0,5$,

$K = 1.000$, dan $x_0 = 300$. Karena $x_0 < \frac{K}{2}$, maka harus dipilih

nilai H yang memenuhi $H < 0,5 \times 300 \left(1 - \frac{300}{1.000} \right)$, yaitu

$H < 105$. Dengan pemilihan nilai $H < 105$ maka diperoleh $x_1 < x_0 < x_2$ dimana $x = x_1$ dan $x = x_2$ merupakan titik keseimbangan model. Dengan kondisi $x_1 < x_0 < x_2$ maka kurva solusi dengan nilai awal $x_0 = 300$ konvergen ke titik keseimbangan $x = x_2$.

Dalam prakteknya, Burghes dan Borrie (1981) menyatakan bahwa level pemanenan biasanya lebih kecil dari

pada MSY suatu populasi. Jika diaplikasikan $H = 90\%$ dari MSY , dimana $MSY = \frac{rK}{4}$, lihat Clark (1985), maka model (3.17)

memunyai dua titik keseimbangan, yaitu $x_1 = \frac{K}{3}$ dan $x_2 = \frac{2K}{3}$.

Dalam kasus ini, untuk menjamin supaya populasi tidak akan punah, ukuran populasi harus ditunggu sampai mencapai level $x(t_0) \geq \frac{K}{3}$ untuk suatu waktu tertentu $t_0 \geq 0$ sebelum dieksploitasi.

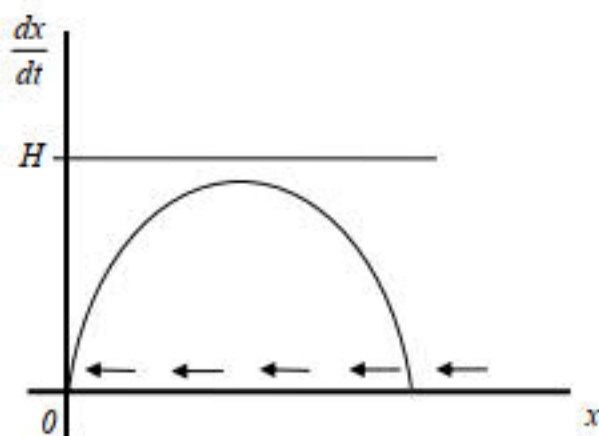
Kasus 3 $H > \frac{Kr}{4}$.

Dalam kasus ini, model (3.17) tidak mempunyai titik keseimbangan yang positif. Karena level pemanenan lebih besar dari laju populasi maksimal, maka untuk $x > 0$ berlaku $\frac{dx}{dt} < 0$, lihat Gambar 3.14. Dengan kondisi demikian, $x(t)$ dengan syarat awal $x(0) > 0$, mencapai nilai nol untuk suatu waktu tertentu.

Dengan kondisi $H > \frac{Kr}{4}$, model (3.17) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{K} \left[\left(x - \frac{K}{2} \right)^2 + k_0^2 \right], \quad (3.26)$$

$$\text{dimana } k_0 = \sqrt{-\frac{K^2}{4} + \frac{HK}{r}}.$$



Gambar 3.14 Bidang fase model logistik dengan $H > \frac{rK}{4}$

Persamaan differensial (3.29) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx}{\left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + k_0^2} = -\frac{r}{K} dt.$$

Dengan mengintegalkan kedua ruas diperoleh

$$x(t) = \frac{K}{2} + k_0 \cotg\left(\frac{rk_0}{K}t + k_2\right),$$

dimana $k_2 = k_0 k_1$ dan k_1 adalah konstanta sembarang.

Dengan mengambil nilai awal $x(0) = x_0$, diperoleh

$$x(t) = \frac{K}{2} + k_0 \cotg\left(\frac{rk_0}{K}t + k_2\right), \quad (3.30)$$

dimana $k_2 = \cotg^{-1}\left(\frac{x_0 - K/2}{k_0}\right)$. Selanjutnya diperoleh

$$k_1 = \frac{1}{k_0} \cotg^{-1}\left(\frac{x_0 - K/2}{k_0}\right).$$

Dari persamaan (3.30), $x(t) = 0$ jika

$$t = t_1 = \frac{\cotg^{-1}\left(-K/2k_0\right) - \cotg^{-1}\left(\frac{x_0 - K/2}{k_0}\right)}{\left(rk_0/K\right)}, \quad (3.31)$$

dan

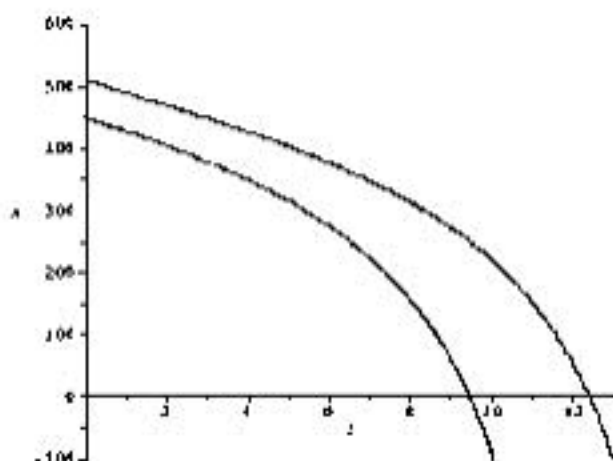
$$\lim_{t \rightarrow t_2} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_2} \left(\frac{K}{2} + k_0 \cotg\left(\frac{rk_0}{K}t + k_2\right) \right) = -\infty,$$

untuk $t_2 = \frac{K(\pi - k_2)}{rk_0}$.

Perhatikan bahwa $0 < t_1 < t_2$, dan solusi (3.30) hanya berlaku

untuk $0 \leq t < \frac{K(\pi - k_2)}{rk_0}$.

Contoh 3.8 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.17) dengan nilai parameter $r = 0,5$, $K = 1.000$, dan $H = 145$. Dengan nilai parameter tersebut, diketahui bahwa $H > \frac{Kr}{4}$. Untuk $x_0 = 510$ dan $x_0 = 450$, kurva solusi persamaan (3.30) diberikan pada Gambar 3.15.



Gambar 3.15 Plot kurva solusi (3.30)

Dari Gambar 3.15 diketahui bahwa dengan kedua nilai awal yang diberikan, kedua kurva solusi tersebut akan mencapai nilai nol suatu waktu tertentu. Waktu yang diperlukan populasi untuk mencapai nilai nol bergantung kepada nilai awal dari populasi. Dengan level pemanenan yang diberikan pada Contoh 3.8, maka populasi akan habis untuk suatu waktu yang berhingga.

Populasi ikan *blue whale* di laut Antarctic sangat beralasan untuk mengikuti model pertumbuhan logistik. Saintis ikan hiu (*whaling scientists*) telah mengestimasi daya dukung (*carrying capacity*) maksimal lingkungan untuk ikan hiu sebesar $K = 150.000$ ikan hiu dan MSY bernilai sekitar 2.000 ikan hiu per tahun. Dengan asumsi bahwa kurva pertumbuhan mengikuti kurva logistik, maka diperoleh $K/2 = 75.000$ ikan hiu yang diperlukan untuk menghasilkan MSY . Dengan data tersebut, laju

pertumbuhan intrinsik populasi ikan hiu diestimasi sebesar $r = 0,053$ per tahun (Clark, 1990; Doucet, 1992).

Dengan menganggap ukuran populasi awal sebesar $x_0 = 60.000$ ikan hiu, maka haruslah level pemanenan $H \leq 1.908$ ikan hiu per tahun untuk menjamin populasi ikan hiu tidak akan punah untuk selamanya. Sementara jika populasi awal sebesar $x_0 = 80.000$ ikan hiu dengan laju pemanenan $H = 4.000$ ikan hiu per tahun, maka kondisi ini menyebabkan eksploitasi berlebih (*over exploitation*) karena level pemanenan lebih besar dari pada level *MSY*. Dengan kondisi tersebut, maka populasi ikan hiu akan punah setelah sekitar 32 tahun.

3.8 Model logistik dengan usaha pemanenan konstan

Pada bagian ini, populasi ditinjau untuk dipanen dengan usaha pemanenan konstan, yaitu laju pemanenan proporsional dengan ukuran populasi. Dengan pertimbangan tersebut, model (3.15) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - Ex, \quad (3.32)$$

dimana E adalah suatu konstanta positif yang menyatakan usaha pemanenan.

Jika $E \neq r$, maka model (3.32) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx}{dt} = (r - E)x \left(1 - \frac{rx}{K(r - E)} \right). \quad (3.33)$$

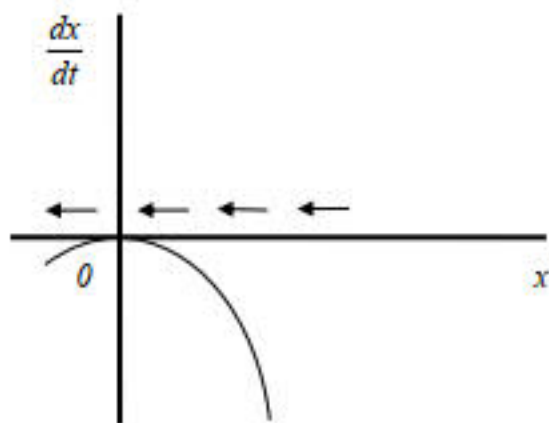
Perhatikan bahwa model (3.33) serupa dengan model (3.15). Analisis model (3.32) akan ditinjau dalam beberapa kasus.

Kasus 1 $E = r$.

Dalam kasus ini, model (3.32) tereduksi menjadi

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{rx^2}{K}. \quad (3.34)$$

Model (3.34) hanya mempunyai satu titik keseimbangan, yaitu $x = 0$. Titik keseimbangan ini secara matematis semi stabil dalam pengertian bahwa $\frac{dx}{dt} < 0$ untuk semua $x \neq 0$, lihat Gambar 3.16. Tetapi jika kita hanya mempertimbangkan sumbu x nonnegatif, yaitu $x \geq 0$, maka untuk $x_0 > 0$ berlaku $\frac{dx}{dt} < 0$ dan dengan itu $x(t)$ akan menuju ke nol.



Gambar 3.16 Bidang fase model logistik untuk $E = r$

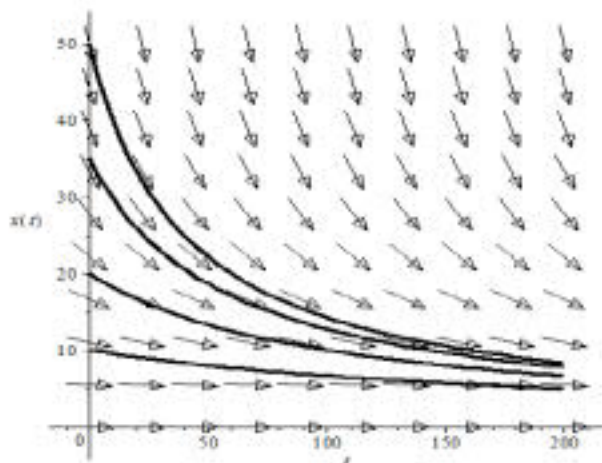
Solusi persamaan differensial (3.34) bersama dengan syarat awal $x(0) = x_0 > 0$ diberikan oleh

$$x(t) = \left(\frac{x_0 K}{r x_0 t + K} \right). \quad (3.35)$$

Dari solusi (3.35) dan juga dengan memperhatikan Gambar 3.16, maka dengan mudah diketahui bahwa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{x_0 K}{r x_0 t + K} \right) = 0.$$

Contoh 3.9 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.34) dengan nilai parameter $r = 0,5$, $K = 1.000$, dan $E = 0,5$. Untuk $x_0 = 10, 20, 35$, dan 50 , diperoleh kurva solusi seperti diberikan pada Gambar 3.17. Kurva-kurva solusi monoton turun dan menuju ke nol.



Gambar 3.17 Plot kurva solusi (3.35)

Kasus 2 $E < r$.

Dalam kasus ini dengan misalkan $r_1 = r - E$ dan $K_1 = K \left(1 - \frac{E}{r} \right)$, maka model (3.33) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} \right). \quad (3.36)$$

Model (3.36) tetap menyatakan suatu model pertumbuhan logistik dengan laju pertumbuhan intrinsik r_1 dan daya dukung maksimal K_1 . Model (3.36) mempunyai dua titik keseimbangan, yaitu $x = 0$ dan $x = K_1$.

Selanjutnya diperoleh bahwa jika $0 < x < K_1$ maka $\frac{dx}{dt} > 0$, dan jika $x > K_1$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$. Dengan demikian titik keseimbangan $x = K_1$ merupakan titik keseimbangan yang stabil. Solusi dari model (3.36) bersama dengan syarat awal $x(0) = x_0 > 0$ diberikan oleh

$$x(t) = \frac{K_1}{1 + c_0 e^{-r_1 t}}, \quad (3.37)$$

dimana $c_0 = \frac{K_1 - x_0}{x_0}$. Dari solusi (3.37) diperoleh

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K_1$. Hal ini bermakna bahwa titik keseimbangan K_1 stabil asimptotik secara global untuk $x_0 > 0$.

Kasus 3 $E > r$.

Dalam kasus ini misalkan $r_2 = E - r$ ($r_2 > 0$) dan $K_2 = K \left(\frac{E - r}{r} \right)$. Dengan pemisalan tersebut, model (3.33) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = -r_2 x \left(1 + \frac{x}{K_2} \right). \quad (3.38)$$

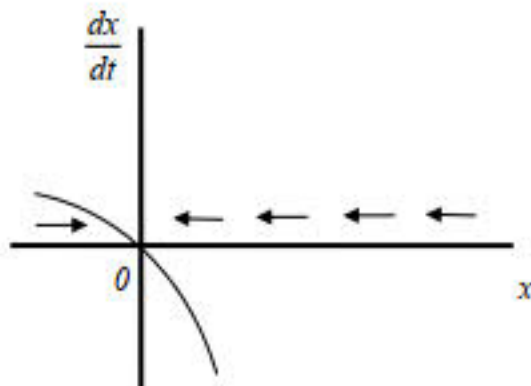
Model (3.38) mempunyai titik keseimbangan $x = 0$. Titik keseimbangan $x = 0$ secara matematis stabil asimptotik karena semua kurva solusi konvergen ke titik $x = 0$. Solusi model (3.38) bersama dengan syarat awal $x(0) = x_0 > 0$ diberikan oleh

$$x(t) = \frac{-K_2}{1 - c_1 e^{r_2 t}}, \quad (3.39)$$

dimana $c_1 = \frac{K_2 + x_0}{x_0}$. Dari solusi (3.39) diperoleh

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-K_2}{1 - c_1 e^{r_2 t}} \right) = 0$. Hal ini bermakna bahwa solusi

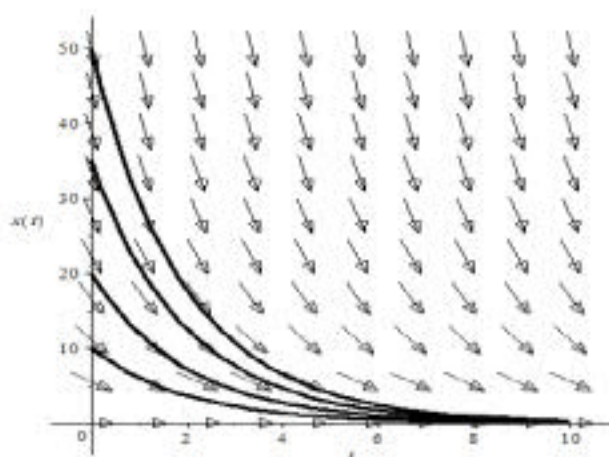
$x(t)$ menuju ke nol untuk t membesar tanpa batas, lihat Gambar 3.18.



Gambar 3.18 Bidang fase model logistik untuk $E > r$

Contoh 3.10 Pertimbangkan laju pertumbuhan suatu populasi yang mengikuti model (3.38) dengan nilai parameter $r = 0,5$, $K = 1.000$, dan $E = 1$. Untuk $x_0 = 10, 20, 35$, dan 50 , diperoleh kurva solusi seperti diberikan pada Gambar 3.19. Kurva-kurva solusi monoton turun dan menuju ke nol.

Sekarang kita perhatikan kembali model (3.33) dengan kasus $E < r$. Dalam kasus ini titik keseimbangan $x = K\left(\frac{r-E}{r}\right)$ stabil asimptotik. Titik keseimbangan yang stabil ini akan dihubungkan dengan persoalan keuntungan maksimal. Dengan pertimbangan bahwa populasi dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan, maka dalam pemanenan tersebut tentulah melibatkan biaya pemanenan dan hasil pemanenan memberikan sejumlah pendapatan.



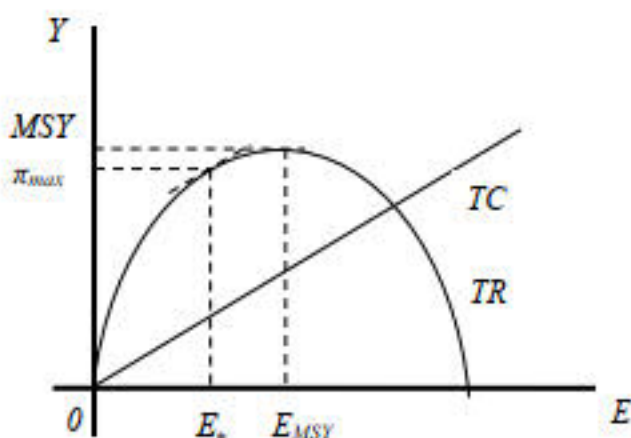
Gambar 3.19 Plot kurva solusi (3.39)

Dengan menganggap biaya total pemanenan proporsional dengan usaha pemanenan diperoleh fungsi biaya total TC sebagai $TC = C(E) = cE$. Selanjutnya diasumsikan bahwa penerimaan total TR proporsional dengan hasil tangkapan, $Y(E)$ yang bergantung pada usaha, yaitu $TR = p Y(E)$, dimana p menyatakan harga per unit tangkapan. Hasil tangkapan dinyatakan sebagai $Y(E) = Ex$ (Conrad dan Clark, 1987). Fungsi keuntungan π yang menyatakan selisih antara TR dan TC ditulis sebagai

$$\pi = TR - TC.$$

Industri perikanan memperoleh keuntungan jika penerimaan lebih besar dari biaya yang digunakan. Hasil tangkapan maksimal yang berkelanjutan (*MSY, maximum sustainable yield*) terjadi pada puncak kurva penerimaan.

Keuntungan maksimal diperoleh pada kondisi dimana slop kurva penerimaan sama dengan slop kurva biaya, lihat Gambar 3.20.



Gambar 3.20 Grafik fungsi TR dan TC

Gambar 3.20 menunjukkan bahwa keuntungan maksimal harus selalu lebih kecil dari pada MSY dan dengan itu, usaha yang diperlukan untuk mencapai keuntungan maksimal lebih kecil dari usaha yang digunakan untuk mencapai MSY . Gambar 3.20 juga menyatakan bahwa biaya yang digunakan dalam eksploitasi mengurangi keuntungan maksimal yang diperoleh (Pitcher dan Hart, 1982).

Hasil tangkapan $Y(E) = Ex$ dengan mudah dapat diperoleh, yaitu dengan mengevaluasi $Y(E) = Ex$ pada nilai titik keseimbangan $x = K\left(\frac{r-E}{r}\right)$. Dengan itu diperoleh hasil tangkapan berkelanjutan sebagai

$$Y(E) = Ex = EK \left(\frac{r-E}{r} \right).$$

Selanjutnya fungsi keuntungan yang dievaluasi pada titik keseimbangan $x = K \left(\frac{r-E}{r} \right)$ menjadi

$$\pi = pEK \left(\frac{r-E}{r} \right) - cE = (pK - c)E - \frac{pK}{r}E^2.$$

Fungsi keuntungan yang diperoleh merupakan fungsi terhadap usaha pemanenan E .

Untuk mendapatkan titik kritis pada fungsi keuntungan, kita selesaikan $\frac{d\pi}{dE} = 0$ dan diperoleh titik kritis

$E_* = \frac{(pK - c)r}{2pK}$. Clark (1976) menyatakan bahwa jika biaya

pemanenan relatif cukup besar daripada harga per unit stok, yaitu $\frac{c}{K} > p$, maka stok (populasi) tidak akan dieksploitasi

sama sekali. Dengan demikian, maka haruslah $0 < E_* < E_{MSY}$,

dimana $E_{MSY} = \frac{r}{2}$. Keuntungan maksimal terjadi pada usaha

pemanenan $E = E_*$ karena $\frac{d^2\pi}{dE^2} < 0$ untuk $E = E_*$.

Jika populasi dipanen dengan level usaha pemanenan sebesar $E = E_* = \frac{(pK - c)r}{2pK}$, maka titik keseimbangan yang

bersesuaian dengan usaha pemanenan tersebut juga tetap stabil asimptotik secara global dan usaha pemanenan tersebut juga

memberikan keuntungan maksimal. Dengan menggunakan usaha pemanenan $E = E_*$, hasil tangkapan akan lebih kecil dari MSY dan ukuran populasi juga stabil (Doucet dan Sloep, 1992).

3.9 Soal latihan

1. Pertimbangkan model pertumbuhan logistik $\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$. Analisis kestabilan titik keseimbangan $x = 0$ dan $x = K$ dengan menggunakan metode pelinearan di sekitar kedua titik keseimbangan. Bandingkan pula hasil yang diperoleh dengan hasil dari solusi analitiknya.
2. Diberikan suatu model pertumbuhan populasi $\frac{dx}{dt} = a - bx$ dengan $a > 0$ dan $b > 0$. Tentukan solusi eksplisit dari model tersebut dan berikan interpretasi dari solusi yang diperoleh.
3. Konstruksi suatu model deterministik pertumbuhan satu populasi dengan mempertimbangkan laju kelahiran, laju kematian, laju imigrasi, dan laju emigrasi. Tentukan pula solusi dari model yang terhasil dan berikan interpretasi dari solusi yang diperoleh.
4. Pertimbangkan model (3.32) untuk kasus $E < r$. Tentukan keuntungan maksimal yang dapat dicapai jika fungsi biaya dinyatakan sebagai $TC = C(E) = c_1 + c_2 E$ dimana c_1 dan c_2 menyatakan biaya tetap dan biaya variabel dalam usaha pemanenan.

5. Tinjau model pertumbuhan populasi dengan pemanenan $\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h(t)$. Misalkan fungsi pemanenan $h(t) = 1 + \cos(t)$ menyatakan laju pemanenan yang bergantung pada waktu pemanenan. Nyatakan model tersebut dalam bentuk persamaan differensi dan selanjutnya plot solusi yang diperoleh untuk beberapa nilai t .

Bab 4

Model Dua Populasi Saling Bebas

4.1 Pendahuluan

Pada bab ini diuraikan model pertumbuhan yang melibatkan dua populasi yang saling bebas. Kedua populasi diasumsikan tidak saling memberikan pengaruh terhadap pertumbuhan populasi lainnya. Model tersebut merupakan perluasan dari model pertumbuhan logistik dengan mempertimbangkan dua populasi. Model ini kemudian dikembangkan dengan mempertimbangkan faktor pemanenan kepada kedua populasi. Faktor pemanenan dikenakan kepada kedua populasi dengan anggapan bahwa kedua populasi yang ditinjau memberikan manfaat secara ekonomi kepada kehidupan manusia.

Pada model pertumbuhan dua populasi yang saling bebas tersebut, kewujudan dan kestabilan titik keseimbangannya dianalisis dan diselesaikan secara analitik. Untuk model dengan usaha pemanenan konstan, titik keseimbangan yang stabil dihubungkan dengan persoalan keuntungan maksimal. Untuk kasus dimana kemungkinan terjadinya pemanenan berlebih juga dianalisis secara detail.

Persoalan yang berhubungan dengan pemanenan optimal pada sistem yang melibatkan banyak populasi sering kali lebih kompleks dan rumit secara teori maupun dalam praktek. Model dengan satu populasi dan dua populasi yang berhubungan dengan persoalan pemanenan optimal biasanya agak lebih sederhana dan dapat dianalisis secara analitik. Pada umumnya industri perikanan mengeksploitasi lebih dari satu spesies ikan Clark (1976). Dalam prakteknya, penangkapan berbagai jenis ikan pada waktu yang sama hanya bersifat insidental.

4.2 Model dua populasi saling bebas

Pada industri perikanan dengan populasi campuran, industri perikanan akan memandang satu populasi atau lebih ditangkap secara simultan dengan menggunakan peralatan tangkap yang sama. Contoh spesifik terjadi pada jaring utama, dimana berbagai spesies *demersal* atau *groundfish* tertangkap pada jaring-jaring utama. Hal ini merupakan suatu fenomena dimana dua spesies atau lebih secara ekologi dan secara ekonomi dipertimbangkan pada saat yang bersamaan.

Model dua populasi yang secara ekologi saling bebas dinyatakan dalam model pertumbuhan logistik. Populasi yang ditinjau pada model ini dianggap hanya meliputi satu spesies. Laju pertumbuhan kedua populasi x (populasi pertama) dan populasi y (populasi kedua) dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan differensial autonomus

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Parameter r dan s masing-masing menyatakan laju pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth*) untuk populasi pertama dan populasi kedua. Konstanta K dan L masing-masing menyatakan daya dukung maksimal (*carrying capacity*) lingkungan untuk menampung semaksimal mungkin populasi pertama dan populasi kedua.

Untuk model (4.1), terdapat empat titik keseimbangan nonnegatif, yaitu $(0, 0)$, $(K, 0)$, $(0, L)$, dan (K, L) . Titik keseimbangan $(0, 0)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil, ia merupakan suatu node. Titik keseimbangan $(K, 0)$ dan $(0, L)$ juga merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil. Kedua titik keseimbangan tersebut merupakan titik pelana. Sementara titik keseimbangan (K, L) merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, ia merupakan suatu node.

Model (4.1) merupakan suatu sistem yang melibatkan dua populasi dimana kedua populasi tersebut tidak saling berinteraksi dan dengan itu keberadaan populasi pertama tidak memengaruhi pertumbuhan populasi kedua, demikian juga sebaliknya. Model (4.1) yang merupakan suatu sistem persamaan differensial autonomus orde satu dapat diselesaikan secara analitik. Penyelesaian dari model (4.1) dengan nilai populasi awal untuk populasi pertama dan populasi kedua $x(0) = x_0 > 0$ dan $y(0) = y_0 > 0$ adalah

$$x(t) = \frac{K}{1 + c_1 e^{-rt}} \text{ dan}$$

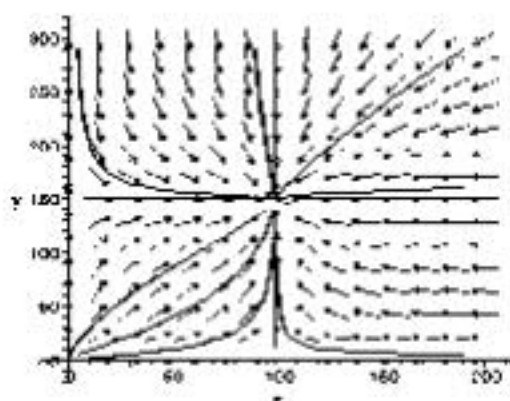
$$y(t) = \frac{L}{1 + c_2 e^{-st}},$$

dimana $c_1 = \frac{K - x_0}{x_0}$ dan $c_2 = \frac{L - y_0}{y_0}$. Dengan mudah dapat

ditunjukkan bahwa untuk waktu t menuju ke tak berhingga, maka populasi $x(t)$ menuju ke nilai K dan populasi $y(t)$ menuju ke nilai L . Keadaan ini diilustrasikan pada Gambar 4.1. Hal ini bermakna bahwa titik keseimbangan (K, L) merupakan suatu titik keseimbangan yang stabil asimptotik. Kedua populasi akan tetap wujud (*coexist*) dan jumlah populasi pertama dan populasi kedua akan menuju ke nilai titik keseimbangannya, yaitu titik (K, L) .

Contoh 4.1 Pertimbangkan model (4.1) dengan nilai parameter $r = 0,5$, $s = 0,4$, $K = 100$, dan $L = 150$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik keseimbangan $(0, 0)$, $(100, 0)$, $(0, 150)$, dan $(100, 150)$. Beberapa plot kurva solusi dengan nilai awal $(5, 5)$, $(5, 1)$, $(1, 5)$, $(190, 5)$, $(5, 290)$, $(190, 290)$, $(190, 160)$, dan $(90, 290)$ untuk $t \in [0, 15]$ diberikan pada Gambar 4.1.

Dari Gambar 4.1 diketahui bahwa jika populasi pada awalnya bernilai positif, maka kedua populasi akan menuju secara asimptotik ke posisi seimbangannya. Dengan demikian kedua populasi akan tetap wujud untuk waktu yang lama.



Gambar 4.1 Kurva solusi dan medan vektor untuk model (4.1)

4.3 Model dua populasi saling bebas dengan laju pemanenan konstan

Pada bagian ini, kedua populasi dianggap bernilai ekonomi dan dengan demikian faktor pemanenan dilibatkan dalam mekanisme model pertumbuhan kedua populasi. Kedua populasi diasumsikan dieksploitasi dengan laju pemanenan konstan.

Model (4.1) yang dikembangkan dengan mempertimbangkan kedua populasi dipanen dengan laju pemanenan konstan diberikan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - H_1, \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) - H_2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Konstanta H_1 dan H_2 masing-masing menyatakan laju pemanenan pada populasi x dan populasi y . Kewujudan titik keseimbangan nonnegatif untuk model (4.2) bergantung pada nilai-nilai parameter model tersebut, termasuk juga bergantung pada nilai-nilai laju pemanenan pada kedua populasi.

Ada sebanyak sembilan kasus yang dapat dipertimbangkan dalam menganalisis kewujudan titik keseimbangan, akan tetapi hanya beberapa kasus saja yang dianggap penting yang akan dianalisis. Pada prinsipnya semua kasus dapat dianalisis dengan merujuk kepada analisis model logistik yang telah diberikan pada Bab 3.

Kasus 1 $H_1 > \frac{rK}{4}$ dan $H_2 > \frac{sL}{4}$

Dalam kasus ini tidak diperoleh suatu titik keseimbangan nonnegatif. Dengan kondisi $H_1 > \frac{rK}{4}$ dan $H_2 > \frac{sL}{4}$, maka

$\frac{dx}{dt} < 0$ dan $\frac{dy}{dt} < 0$ untuk semua populasi x dan populasi y .

Pertumbuhan kedua populasi tersebut bernilai negatif yang bermakna bahwa jumlah kedua populasi tersebut akan berkurang terus menerus. Dengan memberikan nilai parameter dan nilai populasi awal $x(0) > 0$ dan $y(0) > 0$, maka $x(t)$ dan $y(t)$ dengan populasi awal yang diberikan akan bernilai nol untuk suatu waktu tertentu. Hal ini bermakna bahwa kedua populasi tersebut akan punah setelah suatu waktu tertentu.

Kasus ini menyatakan bahwa jika laju pemanenan konstan yang dikenakan pada kedua populasi x dan populasi y

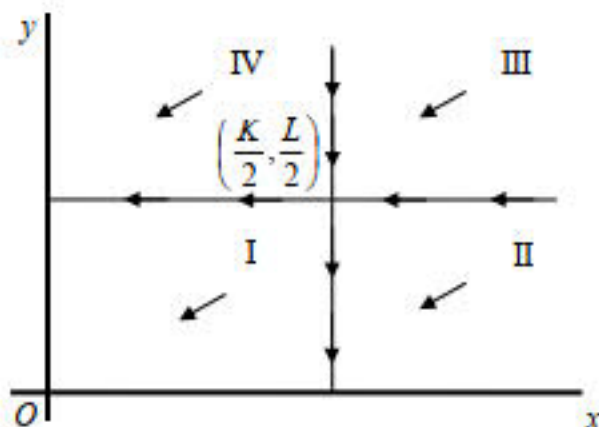
cukup besar, yaitu $H_1 > \frac{rK}{4}$ dan $H_2 > \frac{sL}{4}$, maka laju pertumbuhan kedua populasi bernilai negatif yang akan mengakibatkan jumlah kedua populasi berkurang terus menerus. Dengan pemanenan yang dilakukan cukup besar membuat populasi tidak dapat bertumbuh dan malahan membuat populasi semakin lama semakin berkurang dan pada suatu waktu tertentu kedua populasi akan punah.

Kasus 2 $H_1 = \frac{rK}{4}$ dan $H_2 = \frac{sL}{4}$

Dalam kasus ini, model (4.2) hanya mempunyai satu titik keseimbangan pada kuadran pertama, yaitu $\left(\frac{K}{2}, \frac{L}{2}\right)$. Jika $x > \frac{K}{2}$ maka $\frac{dx}{dt} < 0$, sebaliknya jika $x < \frac{K}{2}$ maka $\frac{dx}{dt} > 0$. Jika $y > \frac{L}{2}$ maka $\frac{dy}{dt} < 0$, sebaliknya jika $y < \frac{L}{2}$ maka $\frac{dy}{dt} > 0$. Dengan kondisi ini, titik keseimbangan $\left(\frac{K}{2}, \frac{L}{2}\right)$ merupakan suatu titik keseimbangan yang semi-stabil, lihat Gambar 4.2. Bagaimanapun, titik keseimbangan $\left(\frac{K}{2}, \frac{L}{2}\right)$ tidak stabil, dalam pengertian bahwa $(x(t), y(t))$ menuju ke posisi $\left(\frac{K}{2}, \frac{L}{2}\right)$ untuk t menuju ke tak berhingga jika $(x(0), y(0))$ berada pada daerah III, tetapi ketika $(x(0), y(0))$ berada pada daerah yang lain, maka

$(x(t), y(t))$ tidak akan menuju ke titik keseimbangan $\left(\frac{K}{2}, \frac{L}{2}\right)$.

Dengan kondisi demikian, kedua populasi akan wujud bersama dan jumlahnya akan menuju ke nilai posisi seimbangnya jika dan hanya jika $(x(0), y(0))$ berada pada daerah III atau pada batas daerah III.



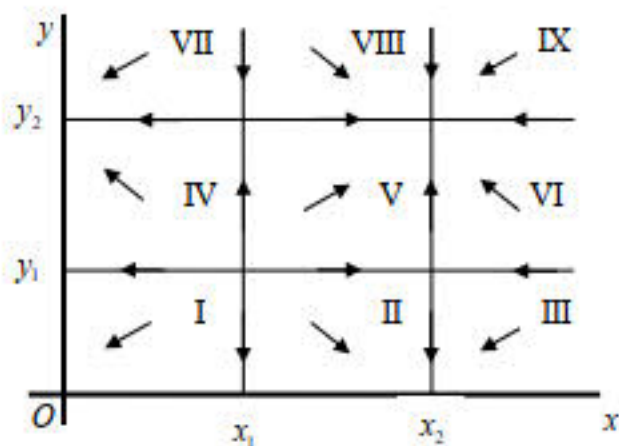
Gambar 4.2 Isoklin dan medan vektor untuk kasus 2

Kasus 3 $H_1 < \frac{rK}{4}$ dan $H_2 < \frac{sL}{4}$

Dalam kasus ini, model (4.2) mempunyai empat titik keseimbangan nonnegatif, yaitu $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_1)$, $C = (x_1, y_2)$, dan $D = (x_2, y_2)$, lihat Gambar 4.3, dimana

$$x_1 = \frac{K}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4H_1}{rK}} \right), \quad x_2 = \frac{K}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4H_1}{rK}} \right),$$

$$y_1 = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4H_2}{sL}} \right), \quad \text{dan} \quad y_2 = \frac{L}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4H_2}{sL}} \right).$$



Gambar 4.3 Isoklin dan medan vektor untuk kasus 3

Dari Gambar 4.3 nampak bahwa secara kualitatif titik keseimbangan $A = (x_1, y_1)$ tidak stabil (node), titik keseimbangan $B = (x_2, y_1)$ dan $C = (x_1, y_2)$ juga tidak stabil, kedua-duanya merupakan titik pelana. Titik keseimbangan $D = (x_2, y_2)$ merupakan satu-satunya titik keseimbangan yang stabil asimptotik.

Kestabilan keempat titik keseimbangan tersebut selanjutnya dianalisis dengan memperhatikan nilai eigen dari model linear yang bersesuaian dengan model nonlinear, model (4.2). Model (4.2) merupakan model yang hampir linear (nonlinear) dengan matriks Jacobi

$$J = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

dimana $P = r - \frac{2rx}{K}$ dan $Q = s - \frac{2sy}{L}$. Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi (3.4) diberikan sebagai

$$f(\lambda) = (\lambda - P)(\lambda - Q)$$

dengan nilai eigen $\lambda = P$ dan $\lambda = Q$. Nilai-nilai eigen tersebut bergantung pada nilai dari titik keseimbangan model yang dianalisis.

Dengan mengambil nilai $x = x_1$ dan $y = y_1$ pada matriks Jacobi (4.3) diperoleh P dan Q keduanya bernilai positif, yaitu kedua nilai eigen bernilai positif. Dengan demikian disimpulkan bahwa titik keseimbangan $A = (x_1, y_1)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil. Titik tersebut merupakan suatu node.

Dengan menggantikan nilai $x = x_2$ dan $y = y_1$ pada matriks Jacobi (4.3) diperoleh P bernilai negatif dan Q bernilai positif, yaitu satu nilai eigen bernilai negatif dan yang lainnya bernilai positif. Dengan demikian disimpulkan bahwa titik keseimbangan $B = (x_2, y_1)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil. Titik tersebut merupakan titik pelana.

Dengan menggantikan nilai $x = x_1$ dan $y = y_2$ pada matriks Jacobi (4.3) diperoleh P bernilai positif dan Q bernilai negatif, yaitu satu nilai eigen bernilai positif dan yang lainnya bernilai negatif. Dengan demikian disimpulkan bahwa titik keseimbangan $C = (x_1, y_2)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil. Titik tersebut merupakan titik pelana.

Untuk titik keseimbangan $D = (x_2, y_2)$ diketahui bahwa P dan Q keduanya bernilai negatif, yaitu kedua nilai eigen bernilai negatif. Dengan demikian disimpulkan bahwa titik keseimbangan $D = (x_2, y_2)$ merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik. Titik tersebut merupakan suatu node yang stabil.

Dengan memperhatikan matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik D diketahui bahwa $Tr(J)$ bernilai negatif dan $\det(J)$ bernilai positif serta diskriminan matriks J juga bernilai positif. Hal ini bermakna (lihat Sanchez, 1968; Wiley, 1979; Haberman, 1998) bahwa diperoleh kedua nilai eigen bernilai real dan negatif yang mungkin sama ataupun tidak sama nilainya. Lebih jauh, dengan Gambar 4.3 diperoleh bahwa gabungan daerah V, VI, VIII, dan IX beserta segmen garis pembatas daerah tersebut menyatakan domain atraksi dari titik keseimbangan $D = (x_2, y_2)$, yaitu jika $(x(0), y(0))$ berada pada domain atraksi tersebut maka untuk $t > 0$, $(x(t), y(t))$ akan menuju ke titik keseimbangan $D = (x_2, y_2)$ untuk t menuju ke tak berhingga.

4.4 Model dua populasi saling bebas dengan usaha pemanenan konstan

Pada bagian ini model (4.1) dikembangkan dengan pertimbangan bahwa kedua populasi yang saling bebas tersebut dipanen dengan laju pemanenan proporsional dengan ukuran masing-masing populasi. Dengan pertimbangan tersebut, model (4.1) dikembangkan menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - q_1 E_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) - q_2 E_2 y,\end{aligned}\tag{4.4}$$

dimana q_1 dan q_2 masing-masing menyatakan koefisien ketertangkapan (*cathability coefficients*) untuk populasi x dan populasi y . Konstanta E_1 dan E_2 masing-masing menyatakan usaha pemanenan yang dikenakan pada populasi x dan populasi y .

Model (4.4) merupakan suatu perluasan model yang telah dikaji oleh Clark (1976). Model tersebut merupakan pengembangan dari model Schaefer untuk kasus dimana dua populasi yang saling bebas dipanen dengan menggunakan peralatan pemanenan yang sama.

Sebagai penyederhanaan dalam analisis, nilai q_1 dan q_2 diambil sama dengan satu. Dengan penyederhanaan tersebut, model (4.4) tereduksi menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - E_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) - E_2 y.\end{aligned}\tag{4.5}$$

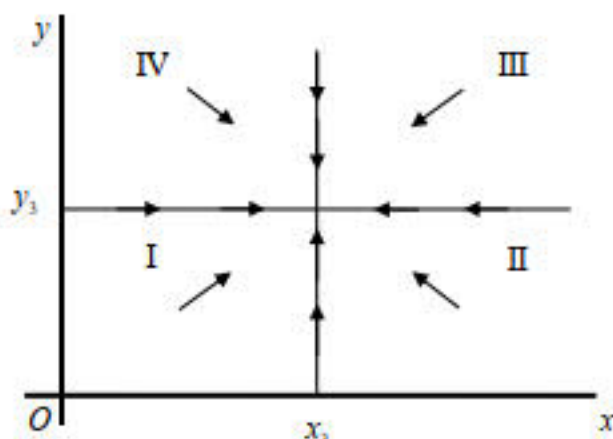
Untuk menjamin bahwa kedua populasi mengikuti pertumbuhan logistik, maka perlu diasumsikan bahwa $r - E_1 > 0$ dan $s - E_2 > 0$, yaitu $(E_1, E_2) \in R$, dimana

$$R = \{(E_1, E_2) \mid 0 < E_1 < r, 0 < E_2 < s\}.$$

Dalam kondisi usaha pemanenan lebih besar atau sama dengan laju pertumbuhan intrinsik populasi, yaitu $r - E_1 \leq 0$ dan $s - E_2 \leq 0$, maka laju pertumbuhan kedua populasi bernilai negatif. Dengan demikian kedua populasi akan mengalami kepunahan setelah sekian waktu tertentu.

Dengan asumsi bahwa $r - E_1 > 0$ dan $s - E_2 > 0$, model (4.5) serupa dengan model (4.1). Model (4.5) mempunyai empat titik keseimbangan nonnegatif, yaitu $(0, 0)$, $(x_3, 0)$, $(0, y_3)$, dan (x_3, y_3) , dimana $x_3 = \frac{K(r - E_1)}{r}$ dan $y_3 = \frac{L(s - E_2)}{s}$. Titik keseimbangan $(0, 0)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil, ia merupakan suatu node. Titik keseimbangan $(x_3, 0)$ dan $(0, y_3)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil, keduanya merupakan titik pelana. Titik keseimbangan (x_3, y_3) stabil asimptotik, ia merupakan suatu node, lihat Gambar 4.4. Titik keseimbangan (x_3, y_3) berada di sebelah kiri bawah dari titik keseimbangan (K, L) untuk model (4.1). Hal ini bermakna bahwa ada pergeseran posisi titik keseimbangan yang

disebabkan oleh adanya usaha pemanenan yang dikenakan pada kedua populasi.



Gambar 4.4 Isoklin dan medan vektor untuk model (4.5)

Dalam usaha pemanenan yang dilakukan maka pasti diperlukan biaya dalam usaha pemanenan. Demikian juga dari hasil pemanenan diperoleh pendapatan. Dalam hal ini titik keseimbangan (x_3, y_3) yang stabil asimptotik akan dihubungkan dengan penerimaan total, biaya total, dan keuntungan. Disini, nilai usaha pemanenan E_1 dan E_2 akan ditentukan sedemikian sehingga dengan nilai usaha pemanenan tertentu, diperoleh suatu titik keseimbangan (x_3, y_3) yang stabil asimptotik dan juga memberikan keuntungan maksimal.

Untuk keperluan analisis, unit harga untuk stok populasi x dan populasi y dinyatakan sebagai p_1 dan p_2 . Biaya total

diasumsikan proporsional dengan usaha pemanenan E_1 dan E_2 dengan koefisien c_1 dan c_2 . Dengan demikian, penerimaan total dapat dinyatakan sebagai fungsi terhadap E_1 dan E_2 .

Fungsi penerimaan total (TR) berkenaan dengan faktor pemanenan yang dilakukan pada populasi x dan populasi y dan bersesuaian dengan titik keseimbangan (x_3, y_3) dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 TR &= TR(x) + TR(y) \\
 &= p_1 E_1 x_3 + p_2 E_2 y_3 \\
 &= p_1 E_1 \left(\frac{K(r - E_1)}{r} \right) + p_2 E_2 \left(\frac{L(s - E_2)}{s} \right) \\
 &= p_1 K E_1 - \frac{p_1 K}{r} E_1^2 + p_2 L E_2 - \frac{p_2 L}{s} E_2^2. \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Fungsi biaya total (TC) berkenaan dengan faktor pemanenan yang dilakukan pada populasi x dan populasi y dan bersesuaian dengan titik keseimbangan (x_3, y_3) dinyatakan sebagai

$$TC = c_1 E_1 + c_2 E_2. \quad (4.7)$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi keuntungan sebagai penerimaan total dikurangi biaya total, yaitu

$$\begin{aligned}
 \pi &= TR - TC \\
 &= (p_1 K - c_1) E_1 - \frac{p_1 K}{r} E_1^2 + (p_2 L - c_2) E_2 - \frac{p_2 L}{s} E_2^2. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Untuk menentukan nilai usaha pemanenan yang memberikan keuntungan maksimal, maka perlu ditentukan titik

kritis usaha pemanenan pada fungsi keuntungan. Untuk itu, perlu ditentukan titik stasioner dari fungsi keuntungan. Dari persamaan (4.8) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial E_1} &= (p_1 K - c_1) - \frac{2p_1 K}{r} E_1 \\ \frac{\partial \pi}{\partial E_2} &= (p_2 L - c_2) - \frac{2p_2 L}{s} E_2.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Selanjutnya diperoleh turunan kedua

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \pi}{\partial E_1^2} &= -\frac{2p_1 K}{r}, \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_2^2} &= -\frac{2p_2 L}{s}, \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_1 \partial E_2} &= 0, \text{ dan} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_2 \partial E_1} &= 0.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Titik kritis dari persamaan (4.8) diperoleh dengan mengambil persamaan (4.9) sama dengan nol dan diselesaikan secara simultan terhadap E_1 dan E_2 . Dengan demikian

diperoleh titik kritis (E_1^*, E_2^*) , dimana $E_1^* = \frac{r(p_1 K - c_1)}{2p_1 K}$ dan

$E_2^* = \frac{s(p_2 L - c_2)}{2p_2 L}$. Titik kritis (E_1^*, E_2^*) termuat dalam R

karena sebelumnya telah diasumsikan bahwa E_1 dan E_2 keduanya bernilai positif. Untuk menjamin E_1 dan E_2 kedua-

duanya bernilai positif maka diasumsikan $\frac{c_1}{K} < p_1$ dan $\frac{c_2}{L} < p_2$.

Asumsi seperti itu juga telah dipertimbangkan dan digunakan oleh Clark (1976).

Dengan menggantikan nilai E_1^* dan E_2^* pada persamaan (4.10) diperoleh determinan matriks D sebagai

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_1 \partial E_2} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_2 \partial E_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_2^2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{2p_1 K}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{2p_2 L}{s} \end{vmatrix} \\ &= \frac{4p_1 p_2 KL}{rs} \end{aligned}$$

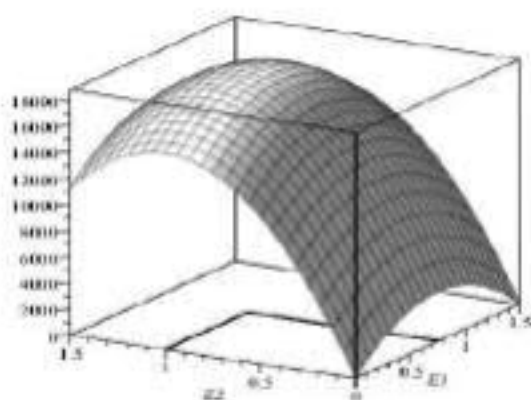
Dari kalkulus diketahui bahwa titik kritis (E_1^*, E_2^*) memberikan keuntungan maksimal multak pada R . Nilai keuntungan maksimal diberikan oleh

$$\begin{aligned} \pi_{maks} &= \pi(E_1^*, E_2^*) \\ &= \frac{r(p_1 K - c_1)^2}{2p_1 K} - \frac{p_1 K}{r} \left(\frac{r(p_1 K - c_1)}{2p_1 K} \right)^2 \\ &\quad + \frac{s(p_2 L - c_2)^2}{2p_2 L} - \frac{p_2 L}{s} \left(\frac{s(p_2 L - c_2)}{2p_2 L} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{r}{4p_1K} (p_1K - c_1)^2 + \frac{s}{4p_2L} (p_2L - c_2)^2.$$

Titik kritis (E_1^*, E_2^*) ternyata tidak memengaruhi kestabilan titik keseimbangan (x_3, y_3) . Hal ini disebabkan karena nilai-nilai usaha pemanenan yang memberikan keuntungan maksimal tidak memengaruhi keberadaan titik keseimbangan yang nonnegatif. Nilai-nilai usaha pemanenan $E_1 = E_1^*$ dan $E_2 = E_2^*$ memberikan titik keseimbangan (x_3, y_3) tetap berada pada kuadran pertama dan tetap stabil asimptotik serta memberikan keuntungan maksimal dari eksploitasi kedua populasi. Gambar 4.5 memberikan ilustrasi fungsi keuntungan yang bergantung pada E_1 dan E_2 , dimana keuntungan maksimal terjadi pada puncak dari permukaan fungsi keuntungan.

Contoh 4.2 Pertimbangkan model (4.5) dengan nilai parameter $r = 1,5$, $s = 2,1$, $K = 1.000$, $L = 2.000$, $p_1 = 10$, $p_2 = 15$, $c_1 = 5$, dan $c_2 = 7$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik kritis usaha pemanenan $(E_1^*, E_2^*) = (0,7496, 0,9998)$ dan titik keseimbangan nonnegatif $(x_3, y_3) = (500,2500, 1000,2333)$. Jika kedua populasi dipanen dengan usaha pemanenan pada titik kritis tersebut diperoleh keuntungan maksimal sebesar $\pi_{maks} = 18.739,2518$. Nilai fungsi keuntungan maksimal terjadi pada puncak permukaan fungsi keuntungan, seperti diperlihatkan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Permukaan fungsi keuntungan

4.5 Model dua populasi saling bebas dengan usaha pemanenan sama

Pada bagian ini, usaha pemanenan yang dikenakan pada kedua model pertumbuhan populasi diasumsikan sama. Asumsi ini merupakan kasus khusus dari model yang telah dibahas pada bagian 4.4. Dengan pertimbangan tersebut, model (4.5) tereduksi menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - Ex \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) - Ey. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Model (4.11) merupakan suatu perluasan dari model Schaefer untuk kasus dimana kedua populasi yang hidup bersama pada lingkungan yang sama dan saling bebas

dieksploitasi dengan menggunakan peralatan tangkap yang sama Clark (1976).

Model (4.11) mempunyai empat titik keseimbangan non-negatif, yaitu $(0, 0)$, $(x_4, 0)$, $(0, y_4)$, dan (x_4, y_4) dimana $x_4 = \frac{K(r-E)}{r}$ dan $y_4 = \frac{L(s-E)}{s}$. Dengan asumsi bahwa $E < r$ dan $E < s$ maka titik keseimbangan (x_4, y_4) berada pada kuadran pertama dan stabil asimptotik.

Titik keseimbangan (x_4, y_4) selanjutnya dihubungkan dengan persoalan keuntungan maksimal. Seperti pada analisis sebelumnya fungsi penerimaan diasumsikan proporsional dengan jumlah hasil tangkapan. Demikian juga fungsi biaya total diasumsikan proporsional dengan usaha penangkapan. Dengan asumsi tersebut fungsi keuntungan dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \pi(x, y, E) &= p_1 x E + p_2 y E - c E \\ &= (p_1 x + p_2 y - c) E \end{aligned} \quad (4.12)$$

Solusi keseimbangan $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ untuk model (4.11) hanya dapat terjadi pada koordinat sumbu, yaitu $x = 0$ atau $y = 0$ atau pada titik (x, y) yang terletak pada segmen garis

$$r \left(1 - \frac{x}{K} \right) = s \left(1 - \frac{y}{L} \right), \quad 0 \leq x \leq K, \quad 0 \leq y \leq L. \quad (4.13)$$

Terdapat beberapa kasus yang dapat ditinjau sehubungan dengan segmen garis (4.13). Sebagai contoh untuk keperluan analisis, anggaplah bahwa

$$r < s. \quad (4.14)$$

Dengan kondisi (4.14), segmen garis (4.13) memotong sumbu y pada

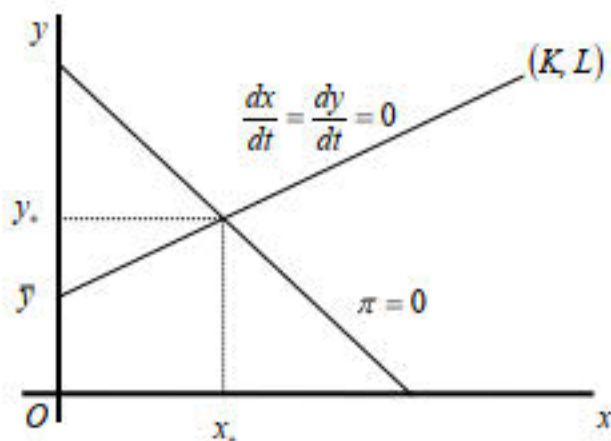
$$\bar{y} = L \left(1 - \frac{r}{s} \right) \quad (4.15)$$

(lihat Gambar 4.6 dan Gambar 4.7). Analisis untuk kasus sebaliknya dari syarat (4.14) serupa, yaitu segmen garis keseimbangan memotong sumbu x pada nilai $x = \bar{x} > 0$.

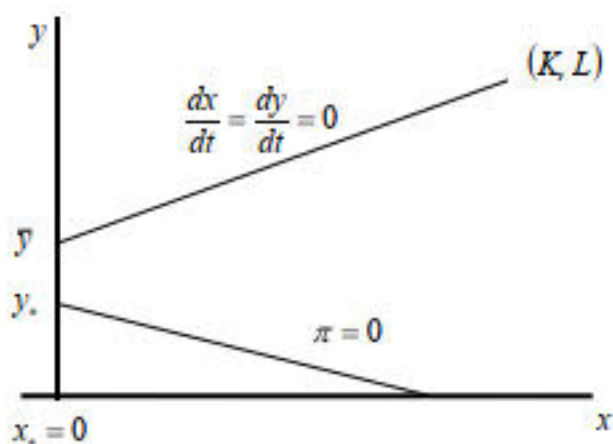
Keseimbangan bionomik dari usaha eksploitasi dikarakterisasikan oleh persamaan (4.13) bersama dengan kondisi

$$\pi = (p_1x + p_2y - c)E = 0. \quad (4.16)$$

Jika $(p_1x + p_2y - c) > 0$ untuk setiap titik (x, y) pada segmen garis keseimbangan, persamaan (4.13), usaha eksploitasi tidak mampu untuk menghasilkan keuntungan. Dengan demikian, dalam kondisi seperti itu, maka tidak akan ada usaha eksploitasi, yaitu $E = 0$. Untuk kasus $(p_1x + p_2y - c) < 0$, akan ditinjau dua kasus seperti yang diberikan pada Gambar 4.6 dan Gambar 4.7.



Gambar 4.6 Keseimbangan bionomik untuk model (4.11) dimana kedua populasi tetap lestari



Gambar 4.7 Keseimbangan bionomik untuk model (4.11) dimana populasi x akan tereliminasi

Pada kasus pertama, Gambar 4.6, garis keuntungan nol, $\pi = 0$, memotong garis keseimbangan pada titik (x_e, y_e) dimana x_e dan y_e keduanya bernilai positif. Sementara pada kasus kedua, Gambar 4.7, kedua garis tidak berpotongan dan keseimbangan bionomik terjadi pada titik $(0, y_e)$, dimana nilai $x_e = 0$. Dari persamaan (4.15) dan (4.16) diketahui bahwa syarat perlu dan cukup untuk x_e bernilai positif adalah $\frac{c}{p_2} > \bar{y}$.

Dalam kasus dimana $r < s$ dan $\bar{y} > \frac{c}{p_2}$ kedua-duanya terpenuhi, maka usaha eksploitasi ini akan mengakibatkan kepunahan populasi x .

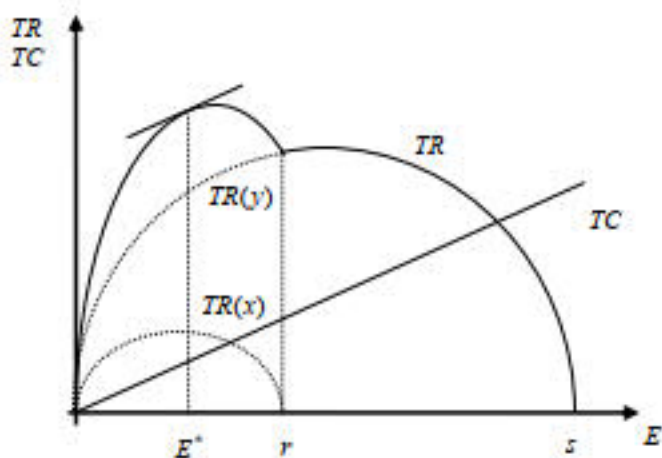
Selanjutnya akan dianalisis kebijakan pemanenan untuk diagram keuntungan - usaha yang statik. Dengan menyelesaikan persamaan (4.11), yaitu $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, diperoleh $x = \frac{K(r - E)}{r}$ dan $y = \frac{L(s - E)}{s}$. Fungsi penerimaan total sebagai fungsi terhadap E yang bersesuaian dengan titik keseimbangan tersebut diberikan sebagai

$$\begin{aligned} TR &= TR(x) + TR(y) \\ &= p_1 K E \left(1 - \frac{E}{r}\right) + p_2 L E \left(1 - \frac{E}{s}\right). \end{aligned}$$

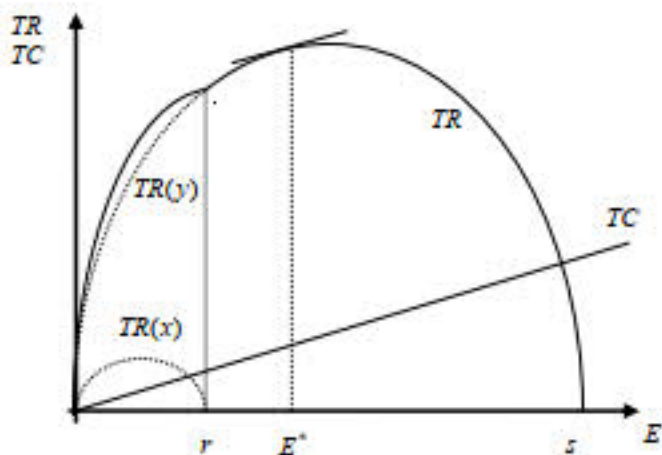
Fungsi penerimaan total hanyalah merupakan jumlahan fungsi penerimaan dari kedua populasi yang berbentuk parabola. Seperti pada analisis sebelumnya, fungsi biaya total dinyatakan sebagai TC diberikan oleh $TC = cE$. Selanjutnya didefinisikan fungsi keuntungan sebagai fungsi terhadap E diberikan oleh

$$\pi = (p_1K + p_2L - c)E - \left(\frac{p_1K}{r} + \frac{p_2L}{s}\right)E^2. \quad (4.17)$$

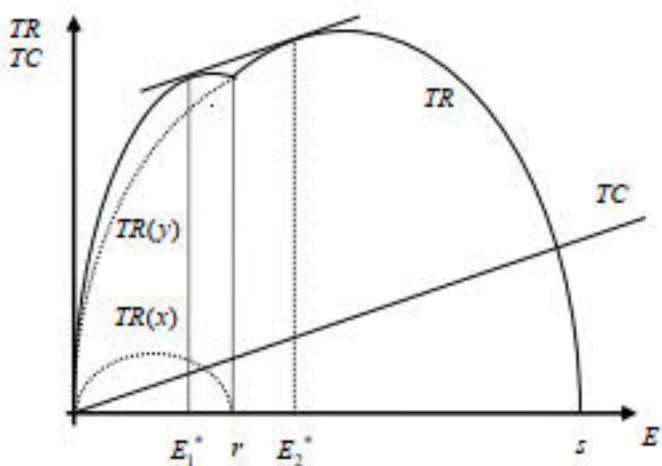
Untuk menjamin terdapat perpotongan antara kurva TR dan sumbu nonnegatif E , maka diasumsikan $(p_1K + p_2L - c)$ bernilai positif dan untuk keperluan analisis, dianggap $r < s$.



Gambar 4.8 Kurva fungsi penerimaan dan fungsi biaya dimana populasi x lebih dominan



Gambar 4.9 Kurva fungsi penerimaan dan fungsi biaya dimana populasi y lebih dominan



Gambar 4.10 Kurva fungsi penerimaan dan fungsi biaya dimana populasi x dan y dominan

Nilai usaha pemanenan E akan ditentukan sedemikian sehingga fungsi keuntungan maksimal. Untuk maksud tersebut, titik kritis dari fungsi keuntungan ditentukan dengan menyelesaikan $\frac{d\pi}{dE} = 0$, yaitu

$$\frac{d\pi}{dE} = (p_1K + p_2L - c) - 2\left(\frac{p_1K}{r} + \frac{p_2L}{s}\right)E = 0.$$

Dari persamaan tersebut diperoleh titik kritis $E = E^*$, dimana

$$E^* = \frac{rs(p_1K + p_2L - c)}{2(p_1sK + p_2rL)}.$$

Karena $\frac{d^2\pi}{dE^2} = -2\left(\frac{p_1K}{r} + \frac{p_2L}{s}\right)$ bernilai negatif untuk $E = E^*$, maka titik kritis $E = E^*$ memberikan nilai maksimal pada fungsi keuntungan.

Dalam kasus $0 < E^* < r$, Gambar 4.8, persamaan (4.17) digunakan untuk menentukan nilai fungsi keuntungan yang maksimal. Populasi x mampu memberikan manfaat secara ekonomi yang lebih besar dari pada populasi y . Untuk kasus $r < E^* < s$, Gambar 4.9, persamaan (4.17) digantikan oleh persamaan $\pi = (p_1K - c)E - \frac{p_1K}{r}E^2$ untuk menentukan nilai fungsi keuntungan yang maksimal. Dalam situasi ini populasi y lebih dominan dari pada populasi x . Sekiranya kasus ini berlaku maka memaksimalkan fungsi keuntungan akan mengarah kepada kepunahan populasi x .

Pada Gambar 4.10 terdapat dua titik kritis yang memberikan keuntungan maksimal, yaitu titik kritis $E = E_1^*$ dan $E = E_2^*$, dengan $0 < E_1^* < r$ dan $r < E_2^* < s$. Fungsi keuntungan untuk titik kritis $E = E_1^*$ menggunakan persamaan (4.17). Sementara untuk titik kritis $E = E_2^*$ digunakan fungsi $\pi = (p_2 L - c)E - \frac{p_2 L}{s} E^2$ untuk mendapatkan keuntungan maksimal. Kedua titik kritis tersebut memberikan keuntungan maksimal yang sama. Jika titik kritis $E = E_1^*$ digunakan, maka kedua populasi akan lestari. Tetapi jika titik kritis $E = E_2^*$ yang digunakan maka populasi x akan tereliminasi dan hanya populasi y yang akan tetap lestari.

4.6 Soal latihan

1. Tentukan nilai eigen yang berhubungan dengan titik keseimbangan $(0, 0)$, $(K, 0)$, $(0, L)$, dan (K, L) untuk model (4.1).
2. Selesaikan model (4.2) untuk kasus $H_1 > \frac{rK}{4}$ dan $H_2 > \frac{sL}{4}$.
3. Selesaikan model (4.2) untuk kasus $H_1 < \frac{rK}{4}$ dan $H_2 < \frac{sL}{4}$.
4. Selesaikan model (4.11) untuk kasus $E < r$ dan $E < r$. Gambarkan juga beberapa kurva solusinya.

5. Analisis kestabilan titik keseimbangan (x_4, y_4) untuk model (4.11) yang dihubungkan dengan persoalan keuntungan maksimal untuk kasus $s < r$.

Bab 5

Model Populasi Mangsa Pemangsa

5.1 Pendahuluan

Model populasi mangsa – pemangsa yang berdasarkan kepada model Lotka-Volterra merupakan salah satu model yang sangat populer dalam Matematika Ekologi. Luckinbill (1973) mempertimbangkan suatu model populasi mangsa – pemangsa dan menunjukkan bahwa populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup bersama (*coexist*) untuk jangka waktu yang panjang bilamana frekuensi kontak antara keduanya dikurangi. Danca et. al. (1997) telah menganalisis suatu model mangsa – pemangsa secara analitik dan secara numerik. Dari kajiannya mereka dapat menentukan suatu titik stasioner (titik keseimbangan) yang stabil maupun perilaku sistem yang kacau (*chaos*).

Kar dan Chauduri (2004) telah mengkaji model mangsa – pemangsa yang merujuk kepada model Lotka-Volterra dengan mempertimbangkan pengaruh pemanenan. Mereka mengkaji kemungkinan terwujudnya keseimbangan bionomik dan pemanenan optimal. Pengaruh pemanenan optimal dengan kuota konstan dan usaha konstan juga telah dikaji oleh Holmberg (1995) dan hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa tangkapan

dengan kuota konstan dapat mengakibatkan gerak osilasi dan kacau serta meningkatkan resiko eksploitasi yang berlebihan.

Suatu model mangsa – pemangsa dengan tipe Holling yang menggunakan usaha pemanenan sebagai suatu kontrol telah dipresentasikan oleh Srinivasu et.al (2001). Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa usaha pemanenan dapat menyebabkan perilaku siklik dari sistem dan kemungkinan terjadi limit cycle yang stabil. Sistem dengan satu mangsa dan satu pemangsa dimana kedua populasi mangsa dan pemangsa dipanen dengan hasil tangkapan konstan telah dikaji oleh Hogart et. al. (1992) dan ditunjukkan bahwa diperoleh suatu kestabilan pada hasil maksimal yang berkelanjutan. Martin dan Ruan (2001) dan Kar (2003) menyarankan bahwa sangat ideal untuk mengkaji faktor pemanenan pada model populasi mangsa dan pemangsa.

Model populasi mangsa – pemangsa memainkan peranan yang penting dalam bioekonomik, khususnya dalam manajemen sumber daya alam yang dapat diperbaharui. Manajemen sumber daya alam terbarukan berdasarkan pada hasil tangkapan maksimal yang berkelanjutan merupakan suatu metode dalam mengatur sumber daya alam. Masalah pada metode ini adalah secara ekonomi tidak terlalu relevan. Hal itu disebabkan karena metode ini hanya mempertimbangkan pendapatan dari eksploitasi sumber daya, tetapi tidak mempertimbangkan biaya dari usaha eksploitasi yang dilakukan. Banyak peneliti yang telah menyatakan keseriusannya terhadap ketidakvalidan metode ini dan mencoba menggantinya dengan metode tangkapan optimal yang berkelanjutan. Metode ini berdasarkan pada kriteria standar biaya untuk memaksimalkan keuntungan yang diperoleh dari usaha eksploitasi.

Manajemen sumber daya alam yang terbarukan merupakan suatu hal yang sangat kompleks dan model matematika yang akurat dengan melibatkan fungsi pemanenan juga menjadi lebih sulit. Hal ini disebabkan karena untuk mendapatkan suatu model yang akurat maka banyak faktor yang harus dipertimbangkan, misalnya ukuran populasi, laju pertumbuhan, daya dukung maksimal suatu ekosistem, kompetitor, biaya operasional usaha pemanenan, harga per unit hasil tangkapan, dan faktor-faktor lain yang berpengaruh. Faktor-faktor yang memengaruhi kompleksitas model secara detail diberikan oleh Clark (1990).

Brauer dan Soudack (1979a, 1979b, 1981) telah mempertimbangkan beberapa model mangsa – pemangsa secara umum yang melibatkan pemanenan dengan laju konstan. Mereka menganalisis perilaku global dari model mangsa – pemangsa dan membuat klasifikasi beberapa kemungkinan yang dapat terjadi serta menentukan domain atraksi dari trajektori. Mereka juga menemukan suatu kondisi tertentu yang membuat model dengan pemanenan menjadi stabil. Ketika model mangsa – pemangsa dalam kondisi stabil dan kestabilannya lemah, maka suatu limit cycle yang stabil asimptotik akan terjadi (Jeffries, 1974).

5.2 Model populasi satu mangsa – satu pemangsa

Suatu model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa yang diusulkan oleh Alfred J. Lotka (1880-1949) dan Vito Volterra (1860-1940), yang dikenal sebagai model Lotka-Volterra, menyatakan suatu hubungan fungsional antara perubahan ukuran populasi mangsa dan pemangsa pada saat

sekarang yang bergantung kepada ukuran populasi mangsa, $x(t)$, dan ukuran populasi pemangsa, $y(t)$, pada saat sekarang, diberikan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Model populasi mangsa - pemangsa ini menyatakan laju pertumbuhan populasi mangsa $x(t)$ pada saat t bertambah secara proporsional dengan ukuran populasi mangsa dan laju pertumbuhannya berkurang dengan adanya interaksi antara populasi pemangsa dan populasi mangsa yang dinyatakan oleh $\alpha x(t)y(t)$. Sementara itu, laju pertumbuhan populasi pemangsa $y(t)$ pada saat t berkurang secara proporsional dengan ukuran populasi pemangsa dan laju pertumbuhannya bertambah dengan adanya interaksi antara populasi pemangsa dan populasi mangsa yang dinyatakan oleh $\beta x(t)y(t)$.

Selanjutnya dengan mempertimbangkan kepadatan populasi atau pengaruh daya dukung lingkungan maksimal untuk populasi mangsa, yaitu suatu konstanta positif K , maka dengan itu model (5.1) dikembangkan dan dimodifikasi menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Model (5.2) melibatkan parameter K , yang menyatakan jumlah maksimal populasi mangsa yang dapat ditampung oleh lingkungannya ketika populasi pemangsa tidak ada. Parameter r

menyatakan laju pertumbuhan intrinsik populasi mangsa, c adalah laju kematian populasi pemangsa, α mengukur laju konsumsi mangsa oleh pemangsa, β mengukur konversi mangsa yang dikonsumsi pemangsa ke dalam laju reproduksi pemangsa. Semua parameter pada model (5.2) diasumsikan bernilai positif.

Titik keseimbangan model (5.2) adalah $O = (0, 0)$, $A = (K, 0)$, dan $C = (x^*, y^*) = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K} \right)$. Untuk mendapatkan titik keseimbangan yang berada pada kuadran pertama, maka perlu diasumsikan bahwa $K\beta - c > 0$. Dalam kasus $K\beta - c = 0$, maka titik keseimbangan C tereduksi menjadi titik keseimbangan A . Matriks Jacobi untuk model (5.2) diberikan sebagai

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -c + \beta x \end{pmatrix}.$$

Titik keseimbangan $O = (0, 0)$ adalah titik keseimbangan yang tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Dalam kasus $K\beta - c > 0$, maka titik keseimbangan $A = (K, 0)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Tetapi ketika $K\beta - c < 0$, maka titik keseimbangan $A = (K, 0)$ merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, ia merupakan titik node. Dalam kasus $K\beta - c < 0$, titik keseimbangan C tidak wujud karena titik tersebut berada pada kuadran keempat. Dalam hal ini populasi pemangsa bernilai negatif. Dalam dinamika populasi, titik keseimbangan yang

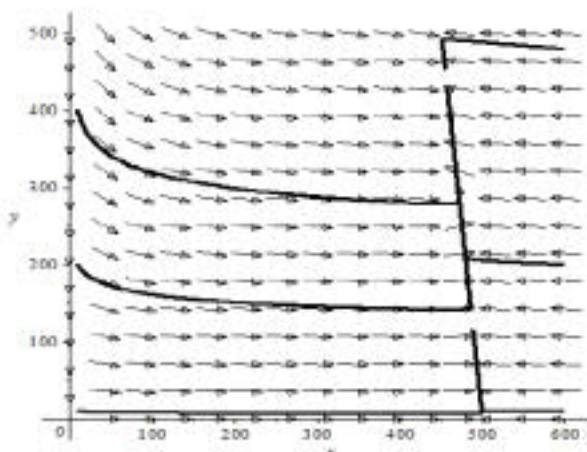
ditinjau hanya titik keseimbangan nonnegatif mengingat populasi tidak ada yang bernilai negatif.

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan C adalah

$$f(\lambda) = \lambda^2 + \frac{rc}{\beta K} \lambda + \frac{c}{\beta K} (r\beta K - rc)$$

yang memberikan nilai eigen dengan bagian real bernilai negatif. Hal ini bermakna bahwa titik keseimbangan C merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik secara lokal. Ho dan Ou (2002) membuktikan bahwa ketika titik keseimbangan C berada pada kuadran pertama, yaitu $K\beta - c > 0$, maka titik keseimbangan tersebut stabil asimptotik secara global.

Contoh 5.1 Pertimbangkan model (5.2) dengan nilai parameter $r = 0,5$, $K = 500$, $\alpha = 0,0001$, $c = 0,0455$, dan $\beta = 0,0001$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik keseimbangan $O = (0, 0)$, $A = (500, 0)$, dan $C = (455, 450)$. Nilai eigen yang bersesuaian dengan titik keseimbangan $C = (455, 450)$ adalah $-0,45045$ dan $-0,00455$. Dari nilai eigen tersebut disimpulkan bahwa titik keseimbangan $C = (455, 450)$ stabil asimptotik. Plot kurva solusi dengan nilai awal $(600, 20)$, $(10, 10)$, $(600, 10)$, $(10, 200)$, $(600, 480)$, dan $(10, 400)$ diberikan pada Gambar 5.1.



Gambar 5.1 Perilaku kurva solusi di sekitar titik keseimbangan

Sintaks untuk menghasilkan Gambar 5.1 dengan menggunakan Maple 16 diberikan sebagai berikut.

- > restart ;
- > r := 0.5 ; K := 500 ; alpha := 0.0001 ; c := 0.0455 ; beta := 0.0001 ;
- > diff(x(t), t) = r*x*(1 - x/K) - alpha*x*y, diff(y(t), t) = y*(-c + beta*x);

$$\frac{d}{dt} x(t) = 0.5x \left(1 - \frac{1}{500}x \right) - 0.0001xy$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = y(-0.0455 + 0.0001x)$$

- > solve([r*x*(1 - x/K) - alpha*x*y = 0, y*(-c + beta*x) = 0], {x, y});
- {x = 0., y = 0.}, {x = 500., y = 0.}, {x = 455., y = 450.}

```

> with(DEtools) : with(plots) :
> r := (beta - c/K);
                                0.000004500000000
> p := r*x(t) * (1 - x(t)/K) - alpha*x(t)*y(t); q := y(t) * (-c + beta
    *x(t));
                                p := 0.5*x(t) * (1 - x(t)/500) - 0.0001*x(t)*y(t)
                                q := y(t) * (-0.0455 + 0.0001*x(t))
> DEtools[DEplot]({diff(x(t), t) = p, diff(y(t), t) = q}, [x(t), y(t)], t
    = 0..600, [[x(0) = 600, y(0) = 200], [x(0) = 10, y(0) = 10], [x(0)
    = 600, y(0) = 10], [x(0) = 10, y(0) = 200], [x(0) = 600, y(0)
    = 480], [x(0) = 10, y(0) = 400]], x = 0..600, y = 0..500, stepsize
    = 0.1, dirgrid = [15, 15], color = black, arrows = medium,
    linecolor = [black, black, black, black, black, black]);

```

Dari Gambar 5.1 jelas bahwa jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada awalnya berada di sekitar titik keseimbangan $O = (0, 0)$, maka kedua populasi mangsa dan pemangsa akan menjauhi titik keseimbangan tersebut. Dengan demikian, titik keseimbangan $O = (0, 0)$ tidak stabil, ia merupakan titik node yang tidak stabil. Jika jumlah populasi pada awalnya berada pada kuadran pertama dan di sekitar titik keseimbangan $A = (500, 0)$, maka kedua populasi mangsa dan pemangsa kemudian mendekat ke titik keseimbangan $A = (500, 0)$, tetapi selanjutnya menjauhi titik keseimbangan tersebut. Dengan demikian titik keseimbangan $A = (500, 0)$ tidak stabil, ia merupakan titik pelana.

Titik keseimbangan $C = (455, 450)$ merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, titik tersebut merupakan

node yang stabil. Jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa berada di sekitar titik keseimbangan $C = (455, 450)$, maka populasi mangsa dan pemangsa akan menuju ke titik keseimbangan $C = (455, 450)$. Titik keseimbangan ini stabil asimptotik secara global di kuadran pertama.

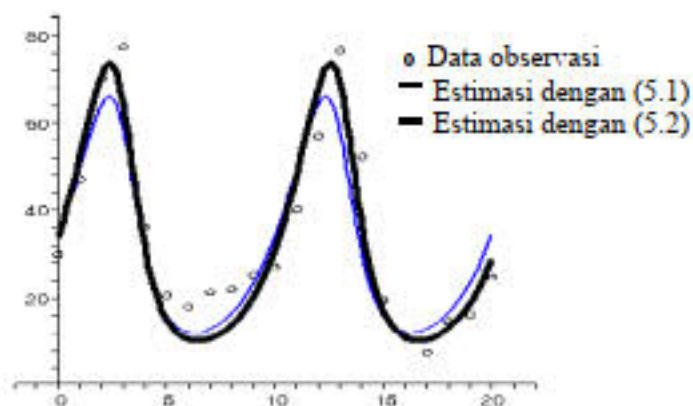
Pertimbangkan data populasi *hare* (semacam kelinci) dan *lynx* (sejenis kucing liar yang berukuran sedang) di North Canada, yang datanya dikoleksi oleh Hudson Bay Company (<http://www-rohan.sdsu.edu>, 2012), yang diberikan pada Tabel 5.1. Interaksi antara populasi *hare* dan *lynx* merupakan bentuk interaksi mangsa dan pemangsa. Populasi *hare* bertindak sebagai mangsa dan populasi *lynx* sebagai pemangsa.

Tabel 5.1 Data populasi *hare* dan *lynx* dari tahun 1900 – 1920

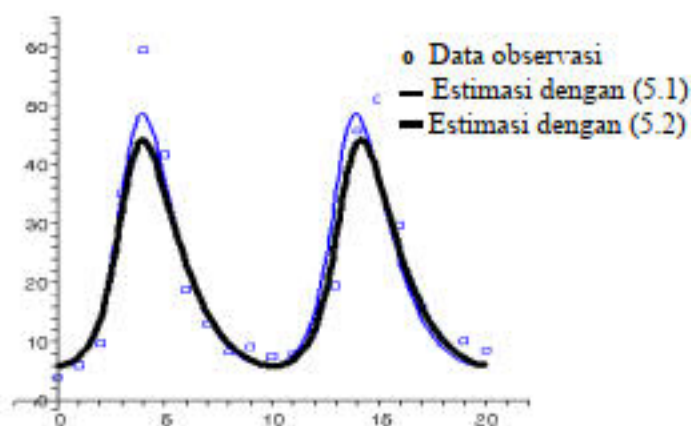
Tahun	Populasi <i>hare</i> (1.000)	Populasi <i>lynx</i> (1.000)
1900	30,0	4,0
1901	47,2	6,1
1902	70,2	9,8
1903	77,4	35,2
1904	36,3	59,4
1905	20,6	41,7
1906	18,1	19,0
1907	21,4	13,0
1908	22,0	8,3
1909	25,4	9,1
1910	27,1	7,4
1911	40,3	8,0

1912	57,0	12,3
1913	76,6	19,5
1914	52,3	45,7
1915	19,5	51,1
1916	11,2	29,7
1917	7,6	15,8
1918	14,6	9,7
1919	16,2	10,1
1920	24,7	8,6

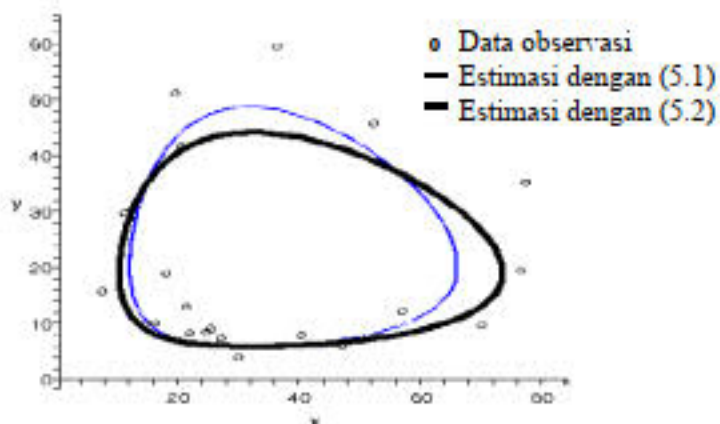
Restrope dan Sanchez (2012) mengestimasi nilai parameter dengan menggunakan algoritma genetik untuk data pada Tabel 5.1 dan diperoleh nilai estimasi parameter $r=0,55$, $\alpha=0,027$, $c=0,83$, dan $\beta=0,026$ untuk model (5.1) dan diperoleh nilai estimasi parameter $r=0,65$, $\alpha=0,034$, $c=0,68$, $K=71.247$, dan $\beta=0,021$ untuk model (5.2). Estimasi ukuran populasi mangsa dan populasi pemangsa dengan menggunakan model (5.1) dan model (5.2) diberikan pada Gambar 5.2, 5.3, dan 5.4.



Gambar 5.2 Plot ukuran populasi mangsa terhadap waktu



Gambar 5.3 Plot ukuran populasi pemangsa terhadap waktu



Gambar 5.4 Plot ukuran populasi mangsa dan pemangsa

Gambar 5.2 menyatakan ukuran populasi *hare* terhadap waktu beserta estimasi ukuran populasi *hare* dengan

menggunakan model (5.1) dan model (5.2). Gambar 5.3 menyatakan ukuran populasi *lynx* terhadap waktu beserta estimasi ukuran populasi *lynx* dengan menggunakan model. Sementara Gambar 5.4 menyatakan hubungan fungsional antara ukuran populasi *hare* dan *lynx* beserta estimasi ukuran populasi *hare* dan *lynx* dengan menggunakan model (5.1) dan model (5.2). Dengan model matematika, kita dapat memprediksi ukuran populasi *hare* dan *lynx* untuk beberapa tahun ke depan dimana ukuran populasi akan berulang pada suatu waktu tertentu.

5.3 Model dengan usaha pemanenan konstan pada populasi pemangsa

Pada model laju pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa, populasi pemangsa dipertimbangkan untuk dieksploitasi dengan usaha pemanenan konstan. Asumsi ini digunakan ketika hanya populasi pemangsa yang dianggap bernilai ekonomi dan dengan itu populasi pemangsa dieksploitasi. Dengan pertimbangan tersebut, model (5.2) dikembangkan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy - Ey. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Parameter E adalah suatu konstanta yang bernilai positif yang menyatakan usaha pemanenan pada populasi pemangsa.

Dengan memisalkan $b = \frac{r}{K}$ dan $m = c + E$, model (5.3)

dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx - bx^2 - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -my + \beta xy.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Model (5.4) secara matematis serupa dengan model (5.2) yang mempunyai titik keseimbangan $O = (0, 0)$, $A = (K, 0)$, dan

$C_0 = \left(\frac{m}{\beta}, \frac{r\beta - bm}{\alpha\beta}\right)$. Matriks Jacobi dari model (5.4) diberikan

sebagai

$$J = \begin{pmatrix} r - 2bx - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -m + \beta x \end{pmatrix}.$$

Titik keseimbangan $O = (0, 0)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil, ia merupakan node. Untuk menganalisis titik keseimbangan $A = (K, 0)$, diasumsikan

$\frac{r}{b} \neq \frac{m}{\beta}$. Jika $\frac{r}{b} > \frac{m}{\beta}$ yaitu $E < \frac{r\beta - bc}{b}$, maka titik

keseimbangan $A = (K, 0)$ tidak stabil, ia merupakan titik pelana.

Sebaliknya, jika $E > \frac{r\beta - bc}{b}$ maka titik keseimbangan

$A = (K, 0)$ stabil asimtotik dan ia merupakan titik node.

Karena titik keseimbangan $A = (K, 0)$ stabil asimtotik, maka jika populasi pada awalnya berada di sekitar titik keseimbangan tersebut, populasi mangsa akan menuju ke nilai K dan populasi

pemangsa akan menuju ke kepunahan. Hal ini disebabkan karena usaha pemanenan yang dikenakan pada populasi pemangsa cukup besar. Dalam kasus ini titik keseimbangan C_0 tidak wujud.

Untuk analisis kestabilan titik keseimbangan $C_0 = \left(\frac{m}{\beta}, \frac{r\beta - bm}{\alpha\beta} \right)$, diasumsikan bahwa $\frac{r}{b} > \frac{m}{\beta}$ yaitu $E < \frac{r\beta - bc}{b}$. Asumsi ini bertujuan untuk menjamin kewujudan titik keseimbangan tersebut pada kuadran pertama, yaitu populasi mangsa dan populasi pemangsa jumlahnya positif. Dalam kasus ini persamaan karakteristik dari matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik keseimbangan $C_0 = \left(\frac{m}{\beta}, \frac{r\beta - bm}{\alpha\beta} \right)$ diberikan sebagai

$$f(\lambda) = \lambda^2 + \left(-\frac{-\alpha bm - \alpha m\beta + a\beta^2 - bm\beta}{\alpha\beta} \right) \lambda - \frac{m(-\alpha bm\beta + ab\beta^2 - b^2 m\beta - a\alpha^2\beta + \alpha^2 bm)}{\alpha\beta^2}. \quad (5.5)$$

Dari persamaan (5.5) dan dengan mengingat bahwa $m = c + E$, maka dengan menggunakan uji kestabilan Hurwitz, titik keseimbangan $C_0 = \left(\frac{m}{\beta}, \frac{r\beta - bm}{\alpha\beta} \right)$ merupakan suatu trajektori atraktor (stabil asimptotik) jika kondisi berikut dipenuhi.

$$i). E > \frac{rb\beta^2 - r\alpha^2\beta + \alpha^2bc - bc\alpha\beta - b^2c\beta}{ab\beta + b^2\beta - \alpha^2b}, \text{ dan} \quad (5.6)$$

$$ii). E > \frac{r\beta^2 - bc\alpha - \beta ac - c\beta b}{b\alpha + a\beta + b\beta}.$$

$$\text{Misalkan } M = \frac{rb\beta^2 - r\alpha^2\beta + \alpha^2bc - bc\alpha\beta - b^2c\beta}{ab\beta + b^2\beta - \alpha^2b} \text{ dan}$$

$$N = \frac{r\beta^2 - bc\alpha - \beta ac - c\beta b}{b\alpha + a\beta + b\beta}. \text{ Titik keseimbangan } C_0$$

merupakan suatu trajektori atraktor jika usaha pemanenan E memenuhi syarat $\max\{M, N\} < E < \frac{r\beta - bc}{b}$. Ilustrasi kurva

solusi di sekitar titik keseimbangan C_0 dalam kasus usaha pemanenan yang memenuhi $\max\{M, N\} < E < \frac{r\beta - bc}{b}$ diberikan seperti pada Gambar 5.2 karena model (5.4) dan model (5.2) serupa.

5.4 Model mangsa – pemangsa dengan usaha pemanenan konstan dan sama

Dalam kasus dimana populasi mangsa dan populasi pemangsa dipanen dengan menggunakan alat penangkapan yang sama, maka hal itu sangat beralasan bahwa usaha pemanenan yang dikenakan pada populasi mangsa dan populasi pemangsa adalah sama, yaitu $E = E_x = E_y$. Dengan asumsi tersebut, maka model (5.2) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy - Ex \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy - Ey.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Model (5.7) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -c_1 y + \beta xy,\end{aligned}\tag{5.8}$$

dimana $r_1 = r - E$, $K_1 = \frac{(r - E)K}{r}$, dan $c_1 = c + E$.

Dengan asumsi bahwa $r > E$ maka titik keseimbangan model (5.8) serupa dengan titik keseimbangan model (5.2), yaitu

$$O = (0, 0), \quad A_1 = (K_1, 0), \quad \text{dan} \quad C_1 = (x^*, y^*) = \left(\frac{c_1}{\beta}, \frac{r_1(K_1\beta - c_1)}{\alpha\beta K_1}\right).$$

Untuk mendapatkan suatu titik keseimbangan yang positif, diasumsikan bahwa $K_1\beta - c_1 > 0$, yaitu $0 < E < \frac{r(K\beta - c)}{(K\beta + r)}$.

Titik keseimbangan $O = (0, 0)$ tidak stabil. Dengan asumsi bahwa $r > E$, maka titik keseimbangan $A_1 = (K_1, 0)$ tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Jika $0 < E < \frac{r(K\beta - c)}{(K\beta + r)}$, maka titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik.

Titik keseimbangan C_1 yang stabil asimptotik dihubungkan dengan persoalan keuntungan maksimal. Untuk

itu, didefinisikan biaya total $TC = c_f + c_v E$ dan pendapatan total $TR = p_x x^* E + p_y y^* E$. Dengan demikian diperoleh fungsi keuntungan

$$\pi = p_x x^* E + p_y y^* E - c_f - c_v E.$$

Dengan mensubstitusikan nilai $x^* = \frac{c_1}{\beta}$ dan $y^* = \frac{r_1(K_1\beta - c_1)}{\alpha\beta K_1}$ yang merupakan nilai pada kondisi seimbang, diperoleh

$$\pi = \frac{-B_1}{\alpha\beta K} E^2 + \frac{B_2}{\alpha\beta K} E - c_f.$$

Fungsi keuntungan ini mempunyai titik kritis $E_c = \frac{B_2}{2B_1}$, dimana

$B_1 = p_x K\beta + p_y r - \alpha p_x K$, yang diasumsikan bernilai positif, dan $B_2 = \alpha p_x K c - \alpha c_x K\beta - p_y c r + p_x K\beta r$. Dengan asumsi tersebut, titik kritis $E_c = \frac{B_2}{2B_1}$ memaksimalkan fungsi keuntungan.

Dari asumsi bahwa usaha pemanenan memenuhi kondisi $0 < E < \frac{r(K\beta - c)}{(K\beta + r)}$, maka diperlukan suatu kondisi bagi titik

kritis supaya $E_c \in \left(0, \frac{r(K\beta - c)}{(K\beta + r)}\right)$, yaitu $0 < \frac{B_2}{2B_1} < \frac{r(K\beta - c)}{(K\beta + r)}$.

Dalam kasus titik kritis $E_c > \frac{r(K\beta - c)}{(K\beta + r)}$, maka fungsi keuntungan mencapai nilai maksimal jika nilai usaha pemanenan $E = \frac{r(K\beta - c)}{(K\beta + r)}$. Namun ternyata situasi ini

menyebabkan kepunahan populasi pemangsa. Karena $y^* = 0$ dan titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik, maka jumlah populasi pemangsa akan menuju ke nilai nol, yaitu menuju ke kepunahan.

Contoh 5.3 Pertimbangkan model (5.7) dengan nilai parameter $r = 2$, $K = 1.000$, $\alpha = 0,1$, $c = 1$, dan $\beta = 0,15$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik keseimbangan $C_1 = (x^*, y^*)$, dimana

$$x^* = 6,66667 + 6,66667E \text{ dan}$$

$$y^* = 19,86667 - 10,13333E.$$

Dengan mengambil nilai $p_x = 0,5$, $p_y = 1,0$, $c_f = 2,0$, dan $c_v = 1,5$, maka diperoleh fungsi keuntungan

$$\pi = \pi(E) = -6,80000E^2 + 21,70000E - 2.$$

Fungsi keuntungan tersebut hanya bergantung pada usaha pemanenan yang memberikan titik kritis $E_c = 1,59559$, dan diketahui bahwa $E_c < \frac{r(K\beta - c)}{K\beta + c} = 1,96053$. Dengan demikian titik kritis $E_c = 1,59559$ memaksimalkan fungsi keuntungan dengan nilai $\pi_{maks} = 15,31213$. Dengan mensubstitusi nilai $E_c = 1,59559$ diperoleh titik keseimbangan $C_1 = (17,30392, 3,69804)$ dan titik keseimbangan ini stabil asimptotik.

5.5 Model mangsa – pemangsa dengan usaha pemanenan konstan

Pada bagian ini kita pertimbangkan populasi mangsa dan populasi pemangsa dipanen dengan usaha pemanenan konstan. Model yang terhasil dengan mempertimbangkan faktor pemanenan dengan usaha konstan diberikan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy - q_x E_x x \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy - q_y E_y y.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Parameter q_x dan q_y menyatakan koefisien ketertangkapan untuk populasi mangsa dan populasi pemangsa. Parameter E_x dan E_y menyatakan usaha-usaha pemanenan yang bernilai konstan dan positif untuk populasi mangsa dan populasi pemangsa.

Untuk keperluan analisis, anggaplah $q_x = q_y = 1$. Dengan demikian model (5.9) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r_2 x \left(1 - \frac{x}{K_2}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -c_2 y + \beta xy,\end{aligned}\tag{5.10}$$

dimana $r_2 = r - E_x$, $K_2 = \frac{(r - E_x)K}{r}$, dan $c_2 = c + E_y$.

Titik keseimbangan model (5.10) yang mungkin bernilai nonnegatif, yaitu berada pada kuadran pertama adalah

$C_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{c_2}{\beta}, \frac{r_2(K_2\beta - c_2)}{\alpha\beta K_2} \right)$. Untuk memperoleh titik keseimbangan yang bernilai positif, kita asumsikan $r > E_x$, $K\beta - c > 0$, dan $K_2\beta - c_2 > 0$, yang ekuivalen dengan menyatakan $(E_x, E_y) \in E$, dimana

$$E = \left\{ (E_x, E_y) \mid \frac{K\beta}{r} E_x + E_y < K\beta - c, E_x > 0, E_y > 0 \right\}.$$

Contoh 5.2 Pertimbangkan model (5.9) dengan nilai parameter $r = 1.1$, $K = 110$, $\alpha = 0.2$, $c = 0.8$, $\beta = 0.1$, $E_x = 0.1$, dan $E_y = 0.2$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik keseimbangan $C_2 = (x_2, y_2) = (10, 4.5)$. Nilai eigen yang bersesuaian dengan titik keseimbangan $C_2 = (x_2, y_2) = (10, 4.5)$ adalah $-0.05000 \pm 0.94736i$. Karena Nilai eigen yang diperoleh bernilai kompleks dengan bagian real negatif, maka disimpulkan bahwa titik keseimbangan $C_2 = (x_2, y_2) = (10, 4.5)$ stabil asimptotik, ia merupakan stabil spiral. Dengan mengaplikasikan usaha pemanenan $E_x = 0.1$ dan $E_y = 0.2$ ternyata tetap diperoleh suatu titik keseimbangan pada kuadran pertama yang stabil. Hal ini bermakna bahwa kedua populasi tetap wujud dan akan menuju ke titik keseimbangannya yang stabil.

5.5.1 Keseimbangan bionomik

Keseimbangan bionomik adalah suatu konsep yang menyatukan keseimbangan secara biologi dan keseimbangan

secara ekonomi. Seperti yang telah dibahas sebelumnya bahwa titik keseimbangan biologi diperoleh dengan menyelesaikan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ secara simultan. Sementara keseimbangan ekonomi dikatakan tercapai jika pendapatan total dari penjualan biomassa yang dipanen sama dengan biaya total yang digunakan dalam usaha pemanenan.

Misalkan

- c_x = biaya pemanenan per unit usaha untuk populasi mangsa
- c_y = biaya pemanenan per unit usaha untuk populasi pemangsa
- c_f = biaya tetap dalam pemanenan
- p_x = harga per unit biomassa untuk populasi mangsa
- p_y = harga per unit biomassa untuk populasi pemangsa.

Fungsi keuntungan dari usaha pemanenan untuk kedua populasi diberikan oleh

$$\pi = p_x x E_x + p_y y E_y - c_f - c_x E_x - c_y E_y.$$

Meskipun biaya pemanenan per unit usaha tidak konstan, tetapi dalam analisis ini diasumsikan bernilai konstan. Keseimbangan bionomik $(x_{ss}, y_{ss}, E_{xx}, E_{yy})$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan simultan berikut.

$$\begin{aligned} r_2 \left(1 - \frac{x}{K_2} \right) - \alpha y &= 0 \\ -c_2 + \beta x &= 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

dan

$$\pi = p_x x E_x + p_y y E_y - c_f - c_x E_x - c_y E_y = 0. \tag{5.12}$$

Dari sistem persamaan (5.11) diperoleh $x_\infty = \frac{c_2}{\beta}$ dan $y_\infty = \frac{r_2(K_2\beta - c_2)}{\alpha\beta K_2}$. Dengan melakukan substitusi nilai $x_\infty = \frac{c_2}{\beta}$ dan $y_\infty = \frac{r_2(K_2\beta - c_2)}{\alpha\beta K_2}$ pada persamaan (5.12) diperoleh fungsi keuntungan

$$\pi = \frac{-p_y r}{\alpha\beta K} E_y^2 + \left(\frac{\alpha_1 K E_x - \gamma_1}{\alpha\beta K} \right) E_y + \left(\frac{p_x c}{\beta} - c_x \right) E_x - c_f,$$

dengan titik kritis (E_{xx}, E_{yy}) , dimana $E_{xx} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1 K} - \frac{2p_y \alpha r \beta_1}{\alpha_1^2 K}$,

$$E_{yy} = \frac{\alpha\beta_1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \alpha p_x - \beta p_y, \quad \beta_1 = \beta c_x - c p_x, \quad \text{dan}$$

$$\gamma_1 = p_y c r - p_y r \beta K + c_y \alpha \beta K.$$

Untuk mendapatkan titik kritis yang bernilai real diasumsikan bahwa $\alpha p_x - \beta p_y \neq 0$. Dari fungsi keuntungan

$$\text{diperoleh} \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_x \partial E_y} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_y \partial E_x} = \frac{\alpha_1}{\alpha\beta}, \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial E_y^2} = \frac{-2p_y r}{\alpha\beta K}.$$

Dengan mengevaluasi nilai diskriminan pada

titik kritis (E_{xx}, E_{yy}) , maka diperoleh

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial E_x^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_y^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_x \partial E_y} \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_y \partial E_x} = -\frac{\alpha_1^2}{\alpha^2 \beta^2} < 0.$$

Dengan demikian fungsi keuntungan π pada titik kritis $(E_{x,c}, E_{y,c})$ merupakan titik pelana. Titik kritis $(E_{x,c}, E_{y,c})$ mungkin termuat atau tidak termuat pada daerah E . Jika titik kritis termuat pada daerah E , maka titik kritis tersebut tetap tidak dipertimbangkan karena kita hanya mempertimbangkan titik kritis yang memaksimalkan fungsi keuntungan.

Nilai maksimal fungsi keuntungan terjadi pada batas daerah E , titik tersebut terletak pada segmen garis AB , dimana $A = \left(\frac{K\beta r - cr}{K\beta}, 0 \right)$ dan $B = (0, K\beta - c)$. Dari persamaan garis lurus yang melalui titik A dan B , diperoleh hubungan fungsional $E_y = \frac{-K\beta}{r} E_x + K\beta - c$ dan dengan melakukan substitusi nilai tersebut ke persamaan fungsi keuntungan diperoleh

$$\pi(E_x) = \frac{-p_x K}{r} E_x^2 + \left(\frac{p_x K r - c_x r + c_x K \beta}{r} \right) E_x + c_x c - c_x K \beta - c_f.$$

Selanjutnya diperoleh $\frac{d\pi}{dE_x} = \frac{-2p_x K}{r} E_x + \frac{p_x K r - c_x r + c_x K \beta}{r}$

dan titik kritis $E_{x,c1} = \frac{p_x K r - c_x r + c_x K \beta}{2p_x K}$. Jika syarat

$0 < \frac{p_x K r - c_x r + c_x K \beta}{2p_x K} < \frac{K\beta r - cr}{K\beta}$ dipenuhi, maka titik kritis

$E_{x,c1} = \frac{p_x K r - c_x r + c_x K \beta}{2p_x K}$ terletak pada segmen garis AB , dan

diasumsikan bahwa syarat tersebut dipenuhi. Lebih lanjut,

diperoleh $E_{y_{opt}} = \frac{p_s K \beta r - c_s K \beta^2 + \beta c_s r - 2c_r p_s}{2r p_s}$. Karena fungsi keuntungan cekung ke bawah, maka titik kritis $(E_{x_{opt}}, E_{y_{opt}})$ memaksimalkan fungsi keuntungan.

Meskipun titik kritis $(E_{x_{opt}}, E_{y_{opt}})$ memaksimalkan fungsi keuntungan, tetapi dengan titik kritis usaha pemanenan tersebut mengakibatkan $y_x = \frac{r_2(K_2\beta - c_2)}{\alpha\beta K_2} = 0$. Situasi ini akan mengakibatkan populasi pemangsa akan punah.

Atas dasar pertimbangan secara biologi kita dapat memikirkan adanya suatu ukuran populasi pemangsa minimal yang diizinkan. Dengan ukuran populasi minimal tersebut, populasi pemangsa masih dapat mempertahankan populasinya dari kepunahan. Misalkan $y \geq y_{min} > 0$, dimana y_{min} menyatakan ukuran populasi minimal pemangsa yang diizinkan. Dengan demikian diperoleh $y_x = \frac{r_2(K_2\beta - c_2)}{\alpha\beta K_2} \geq y_{min}$ atau $y_{min} \alpha\beta K_2 - r_2(K_2\beta - c_2) \leq 0$. Pertidaksamaan ini ekuivalen dengan

$$\frac{y_{min} \alpha\beta K(r - E_x)}{r} - (r - E_x) \left(\frac{K\beta(r - E_x)}{r} - c - E_y \right) \leq 0,$$

$$(r - E_x)E_y + \frac{(r - E_x)(y_{min} \alpha\beta K - K\beta r + K\beta E_x + cr)}{r} \leq 0.$$

Usaha-usaha pemanenan harus termuat dalam E_1 , dimana

$$E_1 = \left\{ (E_x, E_y) \mid (r - E_x)E_y + (r - E_x)(y_{\min} \alpha \beta K - K \beta r + K \beta E_x + cr) / r \leq 0, \right. \\ \left. E_x > 0, E_y > 0 \right\}.$$

Karena titik kritis dari fungsi keuntungan π tidak terjadi pada titik stasioner, maka titik kritis dapat diperoleh pada batas daerah E_1 . Titik kritis yang terjadi pada batas daerah E_1 terletak pada kurva

$$(r - E_x)E_y + \frac{(r - E_x)(y_{\min} \alpha \beta K - K \beta r + K \beta E_x + cr)}{r} = 0.$$

Dari kurva tersebut diperoleh

$$E_{y_c} = \frac{(-y_{\min} \alpha \beta K + K \beta r - K \beta E_x - cr)}{r}.$$

Untuk mendapatkan nilai E_{y_c} bernilai positif, maka kita harus

memilih nilai y_{\min} yang memenuhi $y_{\min} < \frac{K \beta r - K \beta E_x - cr}{\alpha K \beta}$.

Karena $E_x > 0$, maka y_{\min} harus memenuhi $y_{\min} < \frac{K \beta r - cr}{\alpha K \beta}$.

Substitusi nilai E_{y_c} ke dalam persamaan fungsi keuntungan π untuk mendapatkan

$$\pi = \pi(E_x) = \frac{-p_x K}{r} E_x^2 + \frac{A_1}{r} E_x + \frac{B_1}{r},$$

dimana

$$A_1 = -p_x \alpha K y_{\min} + p_x K r - p_y K \beta y_{\min} - c_x r + c_y K \beta, \text{ dan}$$

$$B_1 = -p_x \alpha K \beta y_{\text{min}}^2 + p_x K \beta r y_{\text{min}} - p_x c r y_{\text{min}} + c_x \alpha K \beta y_{\text{min}} - c_x r - c_x K \beta r + c_x c r.$$

Titik kritis fungsi keuntungan adalah $E_{x2} = \frac{A}{2p_x K}$ dan

$$E_{y2} = \frac{-2p_x \alpha K \beta y_{\text{min}} + 2p_x K \beta r - \beta A - 2p_x c r}{2p_x r}.$$

Pasangan berurut titik kritis usaha pemanenan (E_{x2}, E_{y2}) memaksimalkan fungsi keuntungan dan juga mencegah terjadinya kepunahan populasi pemangsa. Jika usaha-usaha pemanenan (E_{x2}, E_{y2}) ini diaplikasikan pada model (5.9), maka titik keseimbangan

$$C_2 = \left(\frac{c_2}{\beta}, \frac{r_2(K_2\beta - c_2)}{\alpha\beta K_2} \right)$$

tetap berada pada kuadran pertama dan stabil asimptotik.

Contoh 5.2 Pertimbangkan model (5.9) dengan nilai parameter $r = 1$, $K = 100$, $\alpha = 0,2$, $c = 1$, dan $\beta = 0,1$. Ambil nilai $p_x = 1$, $p_y = 1$, $c_f = 2$, $c_x = 0,5$, dan $c_y = 0,5$. Dengan nilai parameter model tersebut, diperoleh titik keseimbangan pada kuadran pertama $C_3 = (x_x, y_x)$ dimana $x_x = 10 + 10E_y$ dan $y_x = 4,5 - 5E_x - 0,5E_y$. Selanjutnya diperoleh

$$E = \left\{ (E_x, E_y) \mid 10E_x + E_y < 9, E_x > 0, E_y > 0 \right\}.$$

Fungsi keuntungan yang dievaluasi pada titik keseimbangan $C_3 = (x_x, y_x)$ adalah

$$\pi = \pi(E_x) = -100E_x^2 + 104,5000E_x - 6,5$$

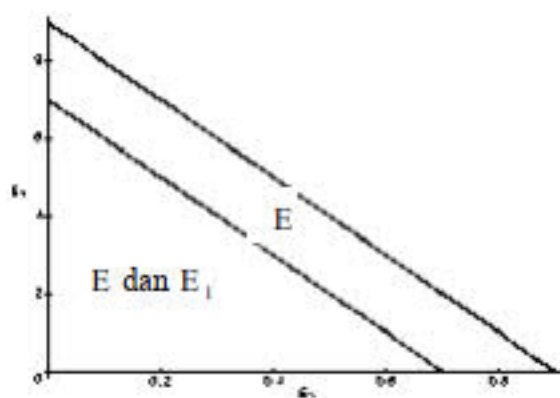
dan diperoleh $E_{x_1} = 0,5225$ dan $E_{y_1} = 3,7750$. Titik kritis (E_{x_1}, E_{y_1}) termuat dalam E dengan keuntungan maksimal $\pi_{maks} = 20,800625$. Dengan mensubstitusikan nilai $E_{x_1} = 0,5225$ dan $E_{y_1} = 3,7750$ diperoleh titik keseimbangan $C_3 = (x_c, y_c) = (47,75, 0)$. Ketika usaha pemanenan $(E_{x_1}, E_{y_1}) = (0,5225, 3,7750)$ digunakan pada model mangsa – pemangsa, maka diperoleh keuntungan maksimal tetapi pada kondisi ini populasi pemangsa akan punah. Misalkan diambil $y_{min} = 1$, maka diperoleh

$$E_1 = \{(E_x, E_y) \mid 2 - 2E_x - (1 - E_x)(9 - 10E_x - E_y) \leq 0, E_x > 0, E_y > 0\}$$

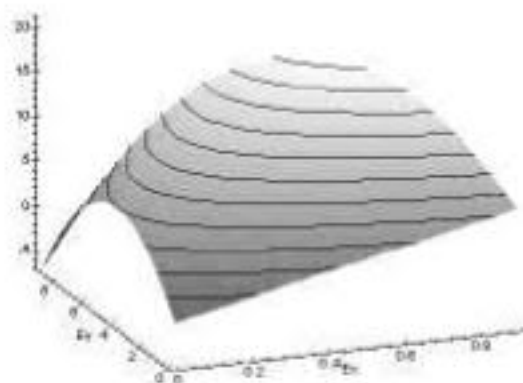
Dengan pembatasan nilai usaha pemanenan pada daerah E_1 , lihat Gambar 5.5, fungsi keuntungan menjadi

$$\pi = \pi(E_x) = -100E_x^2 + 74,5000E_x + 1,5$$

dan diperoleh titik kritis $E_{x_2} = 0,3725$ dan dengan itu diperoleh juga $E_{y_2} = 3,2750$. Titik kritis (E_{x_2}, E_{y_2}) termuat dalam E_1 yang memberikan keuntungan maksimal $\pi_{maks} = 15,375625$, lihat Gambar 5.6. Dengan menggantikan nilai $E_{x_2} = 0,3725$ dan $E_{y_2} = 3,2750$, diperoleh titik keseimbangan $C_3 = (x_c, y_c) = (42,75, 1)$ dan titik keseimbangan ini juga stabil asimptotik. Kebijakan ini sangat beralasan dipertimbangkan untuk diaplikasikan karena populasi pemangsa tidak akan punah dan juga usaha pemanenan yang dilakukan juga memberikan keuntungan maksimal.



Gambar 5.5 Daerah E dan E_1



Gambar 5.6 Permukaan fungsi keuntungan

Pada model yang melibatkan usaha pemanenan konstan pada populasi mangsa dan populasi pemangsa diperoleh suatu kondisi dimana diperoleh suatu nilai usaha pemanenan yang

memaksimalkan fungsi keuntungan tanpa memengaruhi kestabilan titik keseimbangan yang berada pada kuadran pertama. Hal ini dapat terjadi jika diberikan syarat adanya ukuran populasi pemangsa minimal yang dapat bertahan hidup secara alamiah. Dengan syarat tersebut kedua populasi dapat hidup bersama secara berkelanjutan dan juga dari usaha pemanenan diperoleh keuntungan maksimal.

5.5.2 Kebijakan pemanenan optimal

Objektif kita adalah untuk memaksimal nilai sekarang (*present value*) J dari fungsi keuntungan yang diberikan oleh

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \{ (p_x q_x x - c_x) E_x(t) + (p_y q_y y - c_y) E_y(t) - c_f \} dt, \quad (5.13)$$

dimana δ menyatakan laju diskon tahunan. Kita akan memaksimalkan fungsi integral J dengan kendala persamaan (5.9) dengan menggunakan prinsip maksimal Pontryagin, (Pontryagin, et. al, 1962). Variabel-variabel kontrol $E_x(t)$ dan $E_y(t)$ masing-masing diberikan kendala $0 \leq E_x(t) \leq (E_x)_{maks}$ dan $0 \leq E_y(t) \leq (E_y)_{maks}$, dengan $(E_x)_{maks}$ dan $(E_y)_{maks}$ suatu nilai yang diberikan.

Persamaan Hamilton untuk masalah ini diberikan oleh

$$H = e^{-\alpha} \{ (p_x q_x x - c_x) E_x + (p_y q_y y - c_y) E_y - c_f \} \\ + \lambda_x \left[rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \alpha x y - q_x E_x x \right] + \lambda_y \{ -c_y + \beta x y - q_y E_y y \}, \quad (5.14)$$

dimana $\lambda_x(t)$ dan $\lambda_y(t)$ adalah variabel-variabel adjoin.

Variabel-variabel kontrol E_x dan E_y linear dalam persamaan Hamilton H . Selanjutnya, syarat perlu untuk menjadi optimal bagi variabel-variabel kontrol adalah $\frac{\partial H}{\partial E_x} = 0$ dan

$\frac{\partial H}{\partial E_y} = 0$. Dari persamaan Hamilton, persamaan (5.14), diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial E_x} = e^{-\alpha t} (p, q, x - c_x) - \lambda_x q, x = 0, \text{ dengan itu diperoleh}$$

$$\lambda_x = \frac{e^{-\alpha t} (p, q, x - c_x)}{q, x}. \quad (5.15)$$

Demikian juga diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial E_y} = e^{-\alpha t} (p, q, y - c_y) - \lambda_y q, y = 0, \text{ dan dengan itu diperoleh}$$

$$\lambda_y = \frac{e^{-\alpha t} (p, q, y - c_y)}{q, y}. \quad (5.16)$$

Sekali lagi, dari persamaan Hamilton diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial x} = e^{-\alpha t} p, q, E_x + \lambda_x \left\{ r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{rx}{K} - \alpha y - q, E_x \right\} + \lambda_y \beta y$$

dan

$$\frac{\partial H}{\partial y} = e^{-\alpha t} p, q, E_y - \lambda_x \alpha x + \lambda_y (-c + \beta x - q, E_y).$$

Selanjutnya dari prinsip maksimal Pontryagin $\dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}$ atau

$$\dot{\lambda}_x + \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \text{ diperoleh}$$

$$\frac{-\delta e^{-\alpha}(p, q, x - c_x)}{q, x} + e^{-\alpha} p, q, E_x + \lambda_x \left\{ r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{rx}{K} - \alpha y - q, E_x \right\} + \lambda_y \beta y = 0,$$

atau

$$\begin{aligned} & -\delta e^{-\alpha}(Kp, q, x - Kc_x) + e^{-\alpha} p, q, E_x x K + \lambda_x q, x r K - 2\lambda_x q, x^2 r \\ & - \lambda_x q, x \alpha y K - \lambda_x q, x E_x K + \lambda_y \beta y q, x K = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Sekali lagi, dari prinsip maksimal Pontryagin, $\dot{\lambda}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}$ atau

$$\dot{\lambda}_y + \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \text{ diperoleh}$$

$$\frac{-\delta e^{-\alpha}(p, q, y - c_y)}{q, y} + e^{-\alpha} p, q, E_y - \lambda_x \alpha x + \lambda_y (-c + \beta x - q, E_y) = 0,$$

atau

$$\begin{aligned} & -\delta e^{-\alpha}(p, q, y - c_y) + e^{-\alpha} p, q, E_y y - \lambda_x \alpha x q, y \\ & + \lambda_y q, y (-c + \beta x - q, E_y) = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dengan mensubstitusi $\lambda_x = \frac{e^{-\alpha}(p,q,x-c_x)}{q_x x}$ dan $\lambda_y = \frac{e^{-\alpha}(p,q,y-c_y)}{q_y y}$ ke dalam persamaan (5.17) dan (5.18) kemudian diselesaikan secara simultan, diperoleh

$$E_x = \frac{1}{q_x K q_x c_x} \left\{ \delta K p_{,q,x} q_x - \delta K c_{,q} - r K q_{,p,q,x} + r K q_{,q,c_x} + 2x^2 r q_{,p,q} - 2x r q_{,c_x} + \alpha y K q_{,p,q,x} - \alpha y K q_{,q,c_x} - \beta q_{,x} K p_{,q,y} + \beta q_{,x} K c_{,y} \right\} \quad (5.19)$$

dan

$$E_y = \frac{1}{q_y q_y c_y} \left\{ \delta p_{,q,y} q_y - \delta c_{,q} + \alpha q_{,y} p_{,q,x} - \alpha q_{,y} c_x + c q_{,p,q,y} - c q_{,q,c_y} - \beta x q_{,p,q,y} + \beta x q_{,q,c_y} \right\}. \quad (5.20)$$

Dengan mensubstitusi nilai $x_x = \frac{c_x + q_x E_x}{\beta}$ dan $y_y = \frac{\beta K r - c r - \beta K q_x E_x - q_x E_y r}{\alpha \beta K}$ ke dalam persamaan (5.19) dan (5.20) kemudian diselesaikan secara simultan diperoleh nilai variabel-variabel kontrol E_x dan E_y . Nilai x_x dan y_y merupakan nilai pada titik keseimbangan (x_x, y_y) yang stabil. Selanjutnya nilai-nilai E_x , E_y , x_x , dan y_y tersebut

memaksimalkan nilai sekarang dari fungsi keuntungan untuk masalah horizon tak berhingga (*infinite horizon problem*).

Contoh 5.3 Pertimbangkan model (5.9) dan fungsi J dengan nilai parameter $r = 1$, $K = 100$, $\alpha = 0,2$, $c = 1$, dan $\beta = 0,1$. Ambil nilai $p_x = 1$, $p_y = 1$, $c_x = 0,5$, $c_y = 0,5$, $c_f = 2,0$, $q_x = 1$, $q_y = 1$, dan $\delta = 0,005$. Dengan nilai-nilai parameter tersebut diperoleh titik keseimbangan optimal untuk model, yaitu $(x_*, y_*) = (10 + 10E_x, 4,5 - 5E_x - 0,5E_y)$ serta lintasan

variabel-variabel adjoin $\lambda_x = \frac{e^{-0,005t}(9,5 + 10E_y)}{10 + 10E_x}$ dan

$\lambda_y = \frac{e^{-0,005t}(4 - 5E_x - 0,5E_y)}{4,5 - 5E_x - 0,5E_y}$. Selanjutnya diperoleh nilai-nilai

usaha pemanenan optimal $E_x = 0,52491$ dan $E_y = 3,75004$ yang berhubungan dengan titik keseimbangan optimal $(x_*, y_*) = (47,50042, 0,00044)$ serta lintasan variabel-variabel adjoin yang optimal $\lambda_x = 0,9895e^{-0,005t}$ dan

$\lambda_y = -1.130,0081e^{-0,005t}$. Lebih lanjut diperoleh nilai maksimal fungsi nilai sekarang dari keuntungan $J = \int_0^{\infty} 20,975 e^{-0,005t} dt = 4.159,5009$.

Untuk model populasi mangsa – pemangsa dengan usaha pemanenan konstan, titik keseimbangan positif dihubungkan dengan kebijakan optimal dengan memaksimalkan nilai sekarang dari fungsi keuntungan untuk kasus horizon tak berhingga. Nilai sekarang dimaksimalkan dengan menggunakan

prinsip maksimal Pontryagin dengan fungsi kendala yang melibatkan model (5.9), variabel-variabel adjoin dan variabel-variabel kontrol. Dari analisis diperoleh nilai usaha pemanenan tertentu yang memaksimalkan fungsi nilai sekarang dan titik keseimbangan yang positif tetap stabil.

5.6 Model dengan laju pemanenan konstan pada populasi pemangsa

Pada bagian ini, model (5.2) dikembangkan dengan pertimbangan bahwa hanya populasi pemangsa yang dieksploitasi. Dalam hal ini, populasi pemangsa dipertimbangkan dipanen dengan laju pemanenan konstan. Dengan pertimbangan tersebut, model (5.2) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + \beta x) - H.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Konstanta H pada model (5.21) menyatakan fungsi laju pemanenan yang bernilai konstan untuk populasi pemangsa.

Titik keseimbangan untuk model (5.21) yang mungkin berada pada kuadran pertama adalah (x^*, y^*) , dimana $x^* = \frac{r - \alpha k}{b}$ dan $y^* = k$ dengan $b = \frac{r}{K}$ dan k adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $\alpha\beta Z^2 - (r\beta - bc)Z + Hb = 0$. Matriks Jacobi yang bersesuaian dengan model (5.21) diberikan oleh

$$J = \begin{pmatrix} r - 2bx - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -c + \beta x \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Dari matriks Jacobi (5.22) dan dengan memisalkan $A = r - 2bx - \alpha y$, $B = \alpha x$, $C = \beta y$, dan $D = -c + \beta x$, maka persamaan karakteristik yang diperoleh dari matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik keseimbangan (x^*, y^*) dinyatakan sebagai

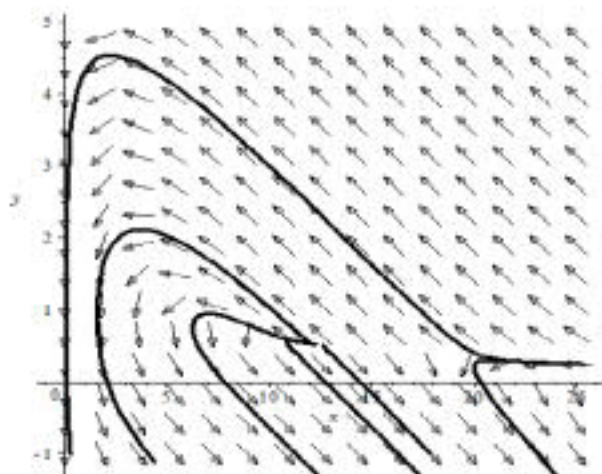
$$f(\lambda) = \lambda^2 - (A + D)\lambda + (AD + BC). \quad (5.23)$$

Misalkan $P = \alpha\beta$, $Q = r\beta - bc$, dan $R = Hb$. Untuk menjamin kewujudan titik keseimbangan yang bernilai positif, maka diasumsikan bahwa $r\beta - bc > 0$ dan $Q^2 - 4PR \geq 0$. Analisis kestabilan untuk titik keseimbangan (x^*, y^*) ditinjau dalam beberapa kasus.

Kasus 1 Jika $Q^2 = 4PR$, yaitu jika $H = \frac{(r\beta - bc)^2}{4\alpha\beta b}$

Titik keseimbangan model (5.21) untuk kasus ini adalah $\left(\frac{r\beta + bc}{2b\beta}, \frac{r\beta - bc}{2\alpha\beta} \right)$. Dalam kasus ini, determinan dari matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik keseimbangan tersebut bernilai nol. Dengan demikian analisis kestabilan titik keseimbangan tersebut tidak dapat ditentukan dengan menggunakan metode pelinearan di sekitar titik keseimbangan. Meskipun demikian, dengan memperhatikan plot kurva solusi untuk model (5.21) di sekitar titik keseimbangan tersebut dapat disimpulkan bahwa

titik keseimbangan $\left(\frac{r\beta + bc}{2b\beta}, \frac{r\beta - bc}{2\alpha\beta} \right)$ merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil. Dengan nilai parameter model $r = 1$, $b = 0,04$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,3$, dan $c = 0,3$ diperoleh titik keseimbangan $(13, 0,48)$. Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan tersebut diberikan pada Gambar 5.7.



Gambar 5.7 Trajektori di sekitar titik keseimbangan $(13, 0,48)$

Kasus 2 Jika $Q^2 - 4PR > 0$, yaitu $H < \frac{(r\beta - bc)^2}{4\alpha\beta b}$

Dalam kasus ini, model (5.21) mempunyai dua titik keseimbangan pada kuadran pertama, yaitu (x_1^*, y_1^*) dan (x_2^*, y_2^*) , dimana

$$x_1^* = \frac{r - \alpha y_1^*}{b},$$

$$x_2^* = \frac{r - \alpha y_2^*}{b},$$

$$y_1^* = \frac{Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}, \text{ dan}$$

$$y_2^* = \frac{Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}.$$

Untuk titik keseimbangan (x_2^*, y_2^*) diketahui bahwa $\det(J) < 0$, dan dengan itu diperoleh $(\text{trace}(J))^2 - 4\det(J) > 0$. Hal ini bermakna bahwa kedua nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobi tersebut bernilai real dengan tanda berlawanan. Dengan demikian disimpulkan bahwa titik keseimbangan (x_2^*, y_2^*) merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil, ia merupakan titik pelana.

Untuk titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) , analisis kestabilannya dilakukan dengan menggunakan uji kestabilan Hurwitz. Dari persamaan (5.23) diperoleh $\det(J) = AD + BC$ bernilai positif. Supaya titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) merupakan suatu trajektori atraktor maka haruslah $(A + D)$ bernilai negatif, yaitu $(-rb + \alpha by_1^* - cb + r\beta - \alpha\beta y_1^*) < 0$. Selanjutnya akan ditinjau beberapa kasus yang memungkinkan $(A + D)$ bernilai negatif.

Kasus 2.1 Jika $b = \beta$

Dalam kasus $b = \beta$, maka $A + D$ bernilai negatif. Dengan demikian bersama dengan kondisi $\det(J) = AD + BC$ bernilai positif, maka titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) merupakan suatu trajektori atraktor.

Kasus 2.2.a Jika $b < \beta$ dan $r(\beta - b) - cb \leq 0$

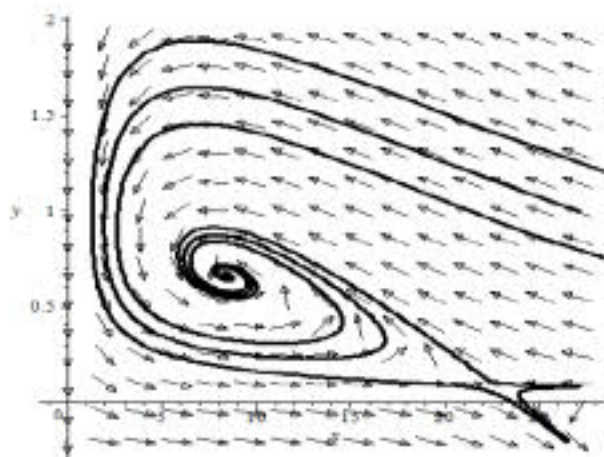
Dalam kasus ini, $A + D$ bernilai negatif. Dengan demikian bersama dengan kondisi $\det(J) = AD + BC$ yang bernilai positif, maka titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) merupakan suatu trajektori atraktor.

Dengan nilai parameter model $r = 1$, $b = 0,04$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,05$, $c = 0,3$, dan $H = 0,0805$ diperoleh titik keseimbangan $(x_1^*, y_1^*) = (8,4289, 0,6628)$. Plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) yang memenuhi kasus 2.2.a diberikan pada Gambar 5.8.

Kasus 2.2.b.i Jika $b < \beta$, $r(\beta - b) - cb > 0$, dan

$$r\beta(\beta - b) - bc\beta - b^2c \leq 0$$

Dalam kasus ini, $A + D$ bernilai negatif. Dengan demikian bersama dengan kondisi $\det(J) = AD + BC$ yang bernilai positif, maka titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) merupakan suatu trajektori atraktor.



Gambar 5.8 Trajektori di sekitar titik keseimbangan (8,4289, 0,6628)

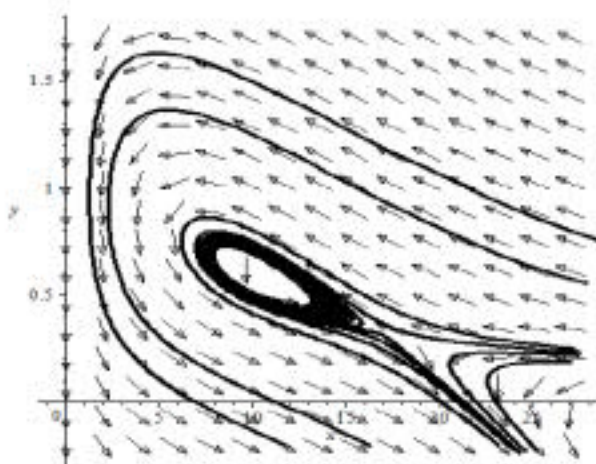
Kasus 2.2.b.ii Jika $b < \beta$, $r(\beta - b) - cb > 0$,

$$r\beta(\beta - b) - bc\beta - b^2c > 0, \text{ dan } H < \frac{(r\beta - rb - bc)bc}{\alpha(b - \beta)^2}$$

Dalam kasus ini, $A + D$ bernilai negatif. Dengan demikian bersama dengan kondisi $\det(J) = AD + BC$ yang bernilai positif, maka titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) merupakan suatu trajektori atraktor.

Dalam kasus $b < \beta$, $r(\beta - b) - cb > 0$, $r\beta(\beta - b) - bc\beta - b^2c > 0$, dan $H = \frac{(a\beta - ab - bc)bc}{\alpha(b - \beta)^2}$, titik keseimbangan model linear yang bersesuaian dengan titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) untuk model nonlinear merupakan

suatu pusat (*centre*). Dengan demikian kestabilan titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) untuk model nonlinear tidak dapat ditentukan dengan menggunakan metode pelinearan. Hal ini disebabkan karena titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) mungkin merupakan suatu *centre* atau mungkin juga merupakan suatu titik spiral (Sanchez, 1968; Boyce dan DiPrima, 1992). Perilaku kurva solusi di sekitar titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) dapat diamati dengan memperhatikan plot kurva solusi untuk sistem nonlinear dan dapat disimpulkan bahwa titik keseimbangan tersebut bukanlah suatu trajektori atraktor. Dengan nilai paramater model $r = 1$, $b = 0,04$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,05$, $c = 0,1$, dan $H = 24$ diperoleh titik keseimbangan $(x_1^*, y_1^*) = (10, 0,600)$. Beberapa plot kurva solusi di sekitar titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) diberikan pada Gambar 5.9.



Gambar 5.9 Trajektori di sekitar titik keseimbangan (10, 0,600)

Kasus 2.3 Jika $b > \beta$

Dalam kasus $b > \beta$, maka $A + D$ bernilai negatif. Dengan demikian bersama dengan kondisi $\det(J) = AD + BC$ yang bernilai positif, maka titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) merupakan suatu trajektori atraktor.

Dari beberapa kasus yang diberikan, diketahui bahwa titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) mungkin stabil dan mungkin juga tidak stabil. Kestabilan titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) bergantung pada nilai parameter model dan juga bergantung pada nilai laju pemanenan yang diberikan. Hal ini bermakna bahwa kewujudan populasi mangsa dan pemangsa dengan laju pemanenan konstan yang dikenakan pada populasi pemangsa juga bergantung kepada besarnya laju pemanenan yang diberikan.

Dari analisis yang dilakukan diketahui bahwa titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) akan mendekati titik keseimbangan $\left(\frac{c}{\beta}, \frac{r\beta - bc}{a\beta}\right)$ ketika nilai laju pemanenan H mendekati nilai nol. Jika titik keseimbangan $\left(\frac{c}{\beta}, \frac{r\beta - bc}{a\beta}\right)$ untuk model tanpa pemanenan, model (5.2), merupakan suatu titik keseimbangan yang stabil asimptotik, maka pada kondisi tersebut bagian real dari nilai eigen bernilai negatif. Karena nilai eigen merupakan suatu fungsi yang bergantung pada H , maka titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) juga stabil asimptotik untuk nilai laju pemanenan $H > 0$ dan dengan nilai yang cukup kecil.

Dalam kondisi sebaliknya, yaitu jika titik keseimbangan (x_1^*, y_1^*) tidak stabil, maka terdapat suatu limit cycle yang stabil asimptotik. Dari teori perturbasi untuk solusi periodik, Coddington dan Levinson (1955) menunjukkan bahwa terdapat suatu limit cycle yang stabil asimptotik untuk nilai laju pemanenan $H > 0$ dan nilainya cukup kecil. Dengan demikian perilaku solusi kualitatif untuk model dengan $H = 0$ menyerupai perilaku solusi secara kualitatif untuk model dengan laju pemanenan $H > 0$ dan nilainya cukup kecil. Brauer dan Soudack (1979b) telah mengkaji suatu sistem satu mangsa dan satu pemangsa untuk suatu sistem yang lebih umum dengan laju pemanenan konstan. Kedua peneliti tersebut menyatakan bahwa dalam kondisi tertentu, wujud suatu limit cycle yang stabil asimptotik.

5.7 Model mangsa – pemangsa dengan laju pemanenan konstan

Pada bagian ini, model (5.21) dikembangkan lagi dengan pertimbangan bahwa kedua populasi dipanen dengan laju pemanenan konstan. Pengembangan model tersebut dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \alpha xy - H_x, \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + \beta x) - H_y, \end{aligned} \tag{5.24}$$

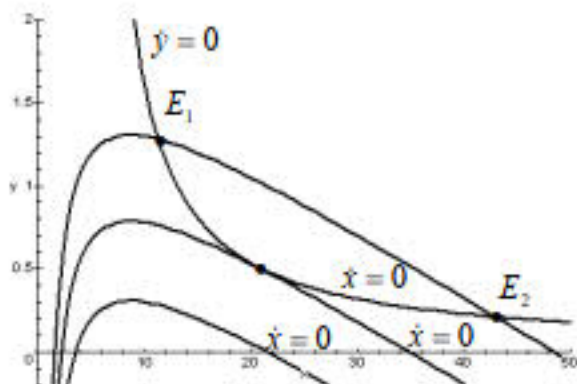
dimana parameter $r, K, \alpha, c, \beta, H_x$, dan H_y semuanya bernilai positif. Konstanta H_x dan H_y berturut-turut menyatakan laju pemanenan untuk populasi x dan populasi y .

Titik keseimbangan model (5.24) diperoleh dengan menyelesaikan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Untuk itu perlu diselesaikan sistem persamaan

$$rx\left(1 - \frac{x}{K} - \alpha y\right) - \alpha y = H_x \quad (5.25.a)$$

$$y(-c + \beta x) = H_y \quad (5.25.b)$$

Pada model (5.24) titik keseimbangan mungkin ada dua, satu, atau tidak ada sama sekali. Kewujudan titik keseimbangan tersebut bergantung pada nilai parameter model. Ilustrasi kewujudan titik keseimbangan diberikan pada Gambar 5.10.



Gambar 5.10 Bidang fase dan titik keseimbangan model (5.24)

Dari persamaan (5.25.a) diperoleh $y = \frac{rx - rx^2/K - H_x}{\alpha x}$

yang mensyaratkan bahwa $r^2 - \frac{4rH_x}{K}$ harus bernilai positif supaya titik keseimbangan berada pada kuadran pertama. Oleh karena itu diasumsikan bahwa $H_x < \frac{rK}{4}$. Karena H_x positif, maka dari persamaan (5.25.b) harus diasumsikan bahwa $x > \frac{c}{\beta}$.

Untuk mendapatkan dua titik keseimbangan yang bernilai positif, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 5.10, maka nilai parameter model (5.24) harus memenuhi pertidaksamaan

$$\frac{rx - rx^2/K - H_x}{\alpha x} > \frac{H_x}{-c + \beta x}, \quad (5.26)$$

untuk suatu $x > \frac{c}{\beta}$.

Pertidaksamaan (5.26) ekuivalen dengan

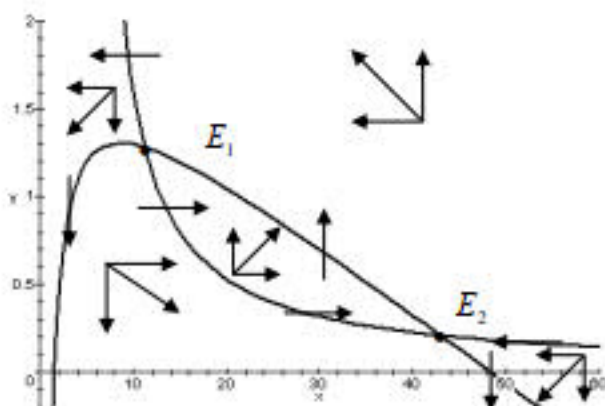
$$(rx - rx^2/K - H_x)(-c + \beta x) - \alpha H_x x > 0,$$

atau

$$\frac{r\beta x^3}{K} - \left(r\beta + \frac{rc}{K}\right)x^2 + (H_x\beta + H_x\alpha + rc)x - H_x c < 0,$$

untuk suatu $x > \frac{c}{\beta}$.

Misalkan kedua titik keseimbangan tersebut adalah $E_1 = (x_1, y_1)$ dan $E_2 = (x_2, y_2)$. Dari analisis bidang fase, Gambar 5.11, titik keseimbangan E_1 mungkin stabil asimptotik, sementara titik keseimbangan E_2 tidak stabil.



Gambar 5.11 Bidang fase dan arah trajektori untuk model (5.24)

Untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan E_1 , kita linearakan model (5.24) di sekitar titik keseimbangan E_1 . Matriks Jacobi model (5.24) adalah

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -c + \beta x \end{pmatrix}.$$

Matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik keseimbangan E_1 , diberikan oleh

$$J = \begin{pmatrix} P_1 & -Q_1 \\ R_1 & S_1 \end{pmatrix},$$

dimana

$$P_1 = r - 2bx_1 - \alpha y_1$$

$$Q_1 = \alpha x_1$$

$$R_1 = \beta y_1 \text{ dan}$$

$$S_1 = -c + \beta x_1.$$

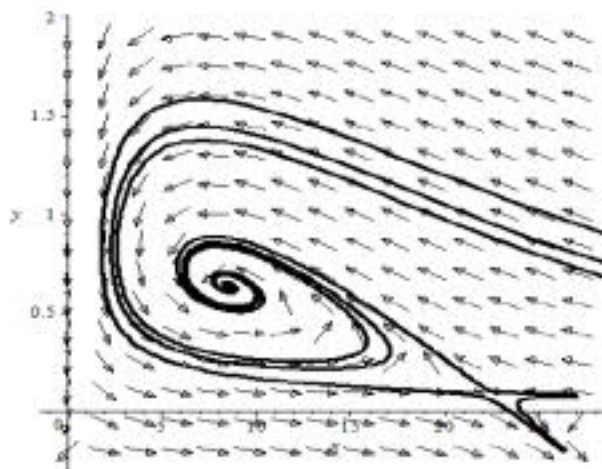
Persamaan karakteristik yang diperoleh dari matriks Jacobi tersebut diberikan oleh

$$\lambda^2 - (P_1 + S_1)\lambda + P_1S_1 + Q_1R_1 = 0. \quad (5.27)$$

Titik keseimbangan E_1 stabil asimptotik ketika semua nilai eigen dari persamaan karakteristik (5.27) bagian realnya bernilai negatif. Hal demikian terjadi jika berlaku $P_1S_1 + Q_1R_1 > 0$ dan $P_1 + S_1 < 0$.

Contoh 5.5 Pertimbangkan model (5.24) dengan nilai parameter $r = 1$, $K = 25$, $\alpha = 1$, $c = 0,3$, $\beta = 0,05$, $H_x = 0,2$, dan $H_y = 0,08$. Dengan nilai parameter tersebut, diperoleh dua titik keseimbangan yang berada pada kuadran pertama, yaitu $E_1 = (8,51625, 0,63586)$ dan $E_2 = (22,32596, 0,09800)$. Nilai eigen yang bersesuaian dengan titik keseimbangan E_1 adalah $-0,09578 \pm 0,47085 i$ dan nilai eigen yang bersesuaian dengan titik keseimbangan E_2 adalah $-0,81710$ dan $0,74932$. Hal ini

menyatakan bahwa titik keseimbangan E_1 stabil asimptotik sementara titik keseimbangan E_2 tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Beberapa kurva solusi $(x(t), y(t))$ diberikan pada Gambar 5.12.



Gambar 5.12 Beberapa trajektori di sekitar titik keseimbangan E_1 dan E_2

Contoh 5.6 Pertimbangkan lagi model (5.24) dengan nilai parameter $r = 1$, $K = 100$, $\alpha = 1$, $c = 0,3$, $\beta = 0,05$, $H_x = 0,2$, dan $H_y = 0,08$. Dengan nilai parameter tersebut, diperoleh dua titik keseimbangan yang berada pada kuadran pertama, yaitu $E_1 = (8,51625, 0,63586)$ dan $E_2 = (22,32596, 0,09800)$. Nilai eigen yang bersesuaian dengan titik keseimbangan E_1 adalah $0,01854 \pm 0,58646 i$ dan nilai eigen yang bersesuaian dengan titik keseimbangan E_2 adalah $-0,96323$ dan $4,58759$. Dengan demikian diketahui bahwa kedua titik keseimbangan tidak stabil.

Titik keseimbangan E_1 merupakan titik spiral yang tidak stabil sementara titik keseimbangan E_2 merupakan titik pelana yang tidak stabil.

5.7 Soal latihan

1. Tentukan nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan titik-titik keseimbangan model (5.2)
2. Diberikan suatu alternatif model populasi mangsa – pemangsa

$$\frac{dx}{dt} = x(r - bx - cy)$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(\beta - \lambda \frac{y}{x}\right).$$

Tentukan semua titik keseimbangan yang mungkin dan tentukan pula kestabilan titik keseimbangan tersebut.

3. Diberikan model populasi mangsa – pemangsa yang dikembangkan, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = x(r - bx - cy)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-c + \lambda x - cy).$$

Jelaskan perbedaan model tersebut dengan model (5.2). Tentukan semua titik keseimbangan yang mungkin dan tentukan pula kestabilan titik keseimbangan tersebut.

4. Jelaskan pengaruh laju pemanenan dengan usaha konstan, model (5.9), pada titik keseimbangan nonnegatif yang berkaitan dengan posisi dan kestabilannya.
5. Dalam kasus model (5.24) hanya mempunyai satu titik keseimbangan. Tunjukkan bahwa titik keseimbangan yang diperoleh dari model linear yang bersesuaian dengan dengan titik keseimbangan tersebut merupakan titik keseimbangan yang tidak terisolasi.

Bab 6

Model Kompetisi Dua Populasi

6.1 Pendahuluan

Pada saat populasi bertumbuh, secara individual spesies akan bersaing untuk mendapatkan nutrisi, tempat, dan sumber-sumber lain yang terbatas dalam ekosistem dimana individu tersebut melangsungkan hidupnya. Spesies dalam satu populasi mungkin bersaing antar spesies dalam suatu populasi. Bentuk interaksi seperti ini disebut sebagai kompetisi intraspesifik (*intraspecific competition*). Spesies dalam satu populasi juga mungkin bersaing dengan spesies yang lain. Bentuk interaksi ini disebut sebagai kompetisi interspesifik (*interspecific competition*). Teori mengenai model pertumbuhan populasi yang berkompetisi diberikan secara detail dalam Roughgarden (1983). Beberapa contoh model populasi yang berkompetisi dapat ditemukan pada Kot (2001).

Schoener (1983) dan Connell (1983) menyatakan bahwa persaingan spesies dalam suatu komunitas secara alamiah sangat sering terjadi pada lapangan eksperimen, yaitu lebih dari separuh waktu hidupnya. Hal ini disebabkan ketika dua populasi atau lebih hidup pada lingkungan yang sama dan menggunakan

sumber daya yang sama dan ketika sumber daya yang ada tidak lagi tersedia secara berlimpah, maka suatu populasi akan bersaing dengan populasi yang lain untuk mempertahankan kelangsungan hidupnya. Dalam persaingan tersebut, beberapa spesies ada yang dapat bertahan hidup dan spesies yang tidak mampu bersaing kemungkinan akan punah.

Dinamika populasi, termasuk populasi yang berkompetisi, memainkan peranan yang penting dalam konsep bioekonomik, khususnya dalam manajemen sumber daya alam yang dapat diperbaharui. Manajemen sumber daya alam tersebut dilakukan dengan menggunakan konsep *MSY* (*maximum sustainable yield*), yang merupakan cara praktis dalam mengelola sumber daya alam. Masalah yang muncul pada konsep *MSY* adalah tidak relevan secara ekonomi, karena konsep ini hanya mempertimbangkan penghasilan tanpa mempertimbangkan biaya operasional dalam usaha eksploitasi sumber daya alam. Dengan kekurangan konsep *MSY* tersebut, beberapa peneliti mengusulkan konsep *OSY* (*optimal sustainable yield*), yang berdasarkan pada biaya yang digunakan dalam usaha eksploitasi untuk memaksimalkan keuntungan (*profit*).

Analisis kestabilan untuk model kompetisi telah banyak dikaji oleh peneliti. Turner dan Rapport (1974) menyatakan bahwa koeksistensi kedua populasi yang berkompetisi mungkin terjadi ketika kompetisi intraspesifik mendominasi kompetisi interspesifik. Suatu kajian yang dilakukan oleh Dayong (1991) dapat dianggap sebagai suatu perluasan dari teori kompetisi sumber daya alam yang berusaha memprediksi hasil dari kompetisi dengan menggunakan informasi dari kebutuhan sumber daya dari spesies yang berkompetisi.

Gopalsamy (1984) telah melakukan kajian tentang sistem kompetisi Lotka-Volterra dan memberikan suatu syarat cukup bagi kewujudan titik keseimbangan yang stabil asimptotik sebagai pertanda terjadinya koeksistensi kedua populasi yang berkompetisi. Hasil yang serupa untuk populasi yang berkompetisi juga dijelaskan oleh Arrowsmith dan Place (1982). Dalam kajian yang lain, solusi eksak untuk suatu model kompetisi dua populasi yang dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial non autonomus dapat diperoleh ketika dilakukan pembatasan pada koefisien fungsi yang terlibat dalam model tersebut (Abdelkader, 1980).

Ketika suatu model populasi yang berkompetisi dieksploitasi hanya untuk populasi yang berlimpah pada suatu waktu, maka usaha eksploitasi ini dapat mencegah kepunahan kedua populasi dalam jangka waktu yang panjang. Dalam suatu kondisi tertentu, kedua populasi dapat beresilasi secara permanen (Messia, et. al., 1984). Brauer dan Sanchez (1975) mengkaji suatu model berdasarkan pada model logistik dengan melibatkan laju pemanenan konstan. Mereka mendapatkan suatu kondisi kestabilan dengan cara membatasi laju pemanenan. Sementara McClanahan (1995) menyatakan bahwa ketika kompetitor superior dipanen dan kompetitor inferior dibiarkan tidak dipanen, maka kompetitor superior akan mengarah kepada kepunahan dan kompetitor inferior dapat tetap bertahan hidup.

Beberapa kajian yang mempertimbangkan model populasi yang berkompetisi antara lain dapat ditemukan pada (Clark, 1976; Ball, 1985; Conrad dan Clark, 1987; Boyce dan DiPrima, 1992; Edward dan Penney, 1993; Ekschmitt dan Breckling, 1994). Sementara model yang melibatkan lebih dari

dua populasi yang berkompetisi dapat ditemukan pada (May, 1974; Pielou, 1977; Ebenhoh, 1994).

6.2 Model kompetisi dua populasi

Model yang ditinjau adalah suatu model pertumbuhan dua populasi yang hidup bersama pada suatu lingkungan yang sama dimana kedua populasi tersebut berkompetisi untuk mendapatkan makanan dan tempat yang terbatas. Karena sumber makanan terbatas, maka model pertumbuhan logistik digunakan untuk menyatakan laju pertumbuhan kedua populasi pada saat tidak ada interaksi antar keduanya. Populasi yang ditinjau dianggap hanya melingkupi satu spesies. Model pertumbuhan dua populasi yang berkompetisi yang ditinjau merujuk pada model pengembangan dari model klasik Lotka-Volterra diberikan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{L}\right) - \beta xy.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Simbol x dan y menyatakan ukuran populasi pertama dan populasi kedua pada saat t . Parameter r dan s yang diasumsikan bernilai positif masing-masing menyatakan laju pertumbuhan intrinsik untuk populasi x dan populasi y . Konstanta K dan L yang juga diasumsikan bernilai positif masing-masing menyatakan daya dukung maksimal (*carrying capacity*) lingkungan untuk menampung populasi x dan populasi y . Parameter α adalah koefisien kompetisi yang mengukur tingkat

populasi y untuk menekan sumber daya yang digunakan oleh populasi x . Parameter β adalah koefisien yang mengukur pengaruh populasi x kepada pertumbuhan populasi y .

Sebagai penyederhanaan, model (6.1) dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx - bx^2 - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= sy - ey^2 - \beta xy\end{aligned}\tag{6.2}$$

dimana $b = \frac{r}{K}$ dan $e = \frac{s}{L}$. Konstanta b dan e juga dikenal sebagai koefisien interaksi antar individu dalam populasi atau koefisien intraspesifik masing-masing untuk populasi x dan populasi y .

Pada model (6.2), terdapat tiga atau empat titik keseimbangan yang terisolasi. Titik keseimbangan model

tersebut adalah $O = (0, 0)$, $A = \left(\frac{r}{b}, 0\right)$, $B = \left(0, \frac{s}{e}\right)$, dan

$$C = \left(\frac{er - \alpha s}{be - \alpha\beta}, \frac{bs - \beta r}{be - \alpha\beta}\right).$$

Kewujudan titik keseimbangan C

ditentukan oleh nilai $er - \alpha s$, $bs - \beta r$, dan $be - \alpha\beta$. Matriks

Jacobi yang bersesuaian dengan model (6.2) diberikan sebagai

$$J = \begin{pmatrix} r - 2bx - cy & -cx \\ -\beta y & s - 2ey - \beta x \end{pmatrix}.$$

Dalam kasus $er - \alpha s = 0$, $bs - \beta r > 0$, dan $be - \alpha\beta > 0$ maka titik C tereduksi menjadi titik B . Sementara jika $bs - \beta r = 0$, $er - \alpha s > 0$, dan $be - \alpha\beta > 0$ maka titik C tereduksi menjadi titik A . Hanya titik keseimbangan C yang dapat wujud pada kuadran pertama, dalam pengertian bahwa hanya titik keseimbangan tersebut yang dapat memberikan populasi seimbang yang bernilai positif. Pada kondisi seimbang, ukuran populasi x dan populasi y keduanya bernilai positif.

Jika solusi yang ditinjau pada model (6.2) hanya solusi yang berada pada kuadran pertama dan pada batas kuadran pertama, maka semua solusi $(x(t), y(t))$ dari model (6.2) bernilai positif dan terbatas. Dengan perkataan lain, bahwa sebarang solusi $(x(t), y(t))$ dari model (6.2) yang pada awalnya berada pada kuadran pertama akan masuk pada daerah Ω yang positif dan terbatas, dimana Ω dibatasi oleh $x = 0$, $y = 0$, dan

$$\frac{r}{\alpha}x + \frac{s}{\beta}y = \frac{rs}{\alpha\beta}, \text{ yaitu}$$

$$\Omega = \left\{ (x, y) \mid x > 0, y > 0, \frac{r}{\alpha}x + \frac{s}{\beta}y \leq \frac{rs}{\alpha\beta} \right\}.$$

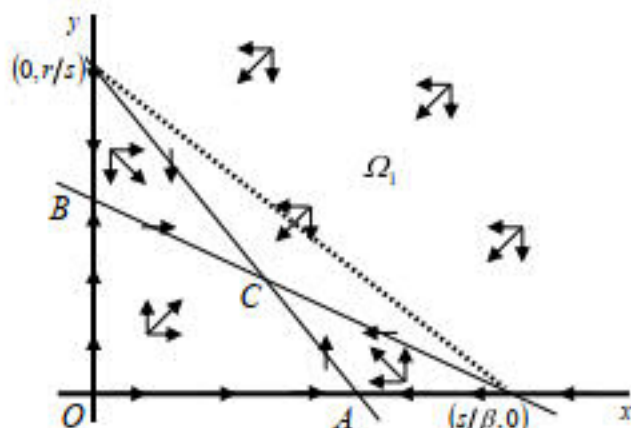
Untuk menunjukkan bahwa solusi dari model (6.2) bernilai positif, maka harus ditunjukkan bahwa jika $(x(0), y(0))$ pada awalnya berada pada kuadran pertama, maka solusi $(x(t), y(t))$ juga akan tetap berada pada kuadran pertama untuk setiap waktu $t > 0$. Jika tidak demikian, maka terdapat suatu

waktu tertentu $t_1 > 0$ sedemikian sehingga $(x(t_1), y(t_1))$ sama dengan $(x, 0)$ yang merupakan titik pada sumbu x positif atau $(x(t_1), y(t_1))$ sama dengan $(0, y)$ yang merupakan titik pada sumbu y positif. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa sumbu x positif merupakan suatu manifold stabil unik pada titik A dan sumbu y positif merupakan suatu manifold stabil unik pada titik B , yaitu jika suatu solusi yang pada awalnya tidak berada pada sumbu x positif atau tidak berada pada sumbu y positif maka solusi tersebut tidak akan pernah berada pada sumbu x positif atau pada sumbu y positif.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa semua solusi $(x(t), y(t))$ terbatas, dimisalkan

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y) \mid x > 0, y > 0, \frac{r}{\alpha}x + \frac{s}{\beta}y > \frac{rs}{\alpha\beta} \right\}.$$

Karena $\frac{dx}{dt} < 0$ dan $\frac{dy}{dt} < 0$ untuk $(x, y) \in \Omega_1$, maka sebarang kurva solusi dengan kondisi awal $(x(0), y(0)) \in \Omega_1$ akan bergerak masuk ke daerah Ω . Jika tidak demikian maka kurva solusi tersebut akan masuk ke sumbu x positif atau masuk ke sumbu y positif. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa sumbu x positif merupakan suatu manifold stabil unik untuk titik keseimbangan A dan sumbu y positif merupakan suatu manifold stabil unik untuk titik B . Medan arah kurva solusi pada kuadran pertama dan pada sumbu x positif serta pada sumbu y positif diberikan pada Gambar 6.1.



Gambar 6.1 Medan arah kurva solusi di sekitar titik keseimbangan model (6.2)

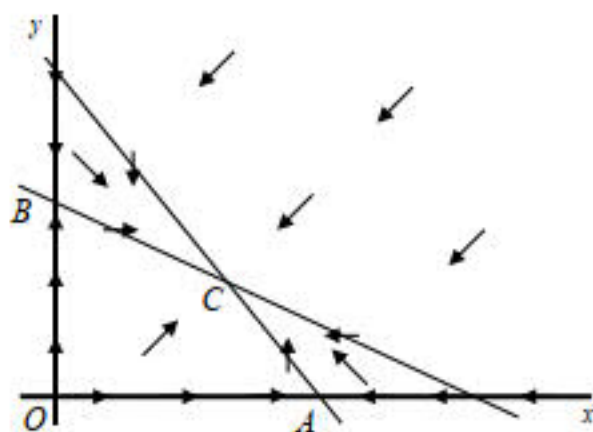
Dalam kasus $er - \alpha s > 0$, $bs - \beta r > 0$, dan $be - \alpha\beta > 0$, titik keseimbangan C pada model (6.2) stabil asimptotik secara global. Untuk membuktikan kestabilan global titik keseimbangan C , misalkan $F(x, y) = \frac{1}{xy}$, untuk $x > 0$ dan $y > 0$. Dengan itu diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x, y) \frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B(x, y) \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{xy} (rx - bx^2 - \alpha xy) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{xy} (sy - ey^2 - \beta xy) \right) \end{aligned}$$

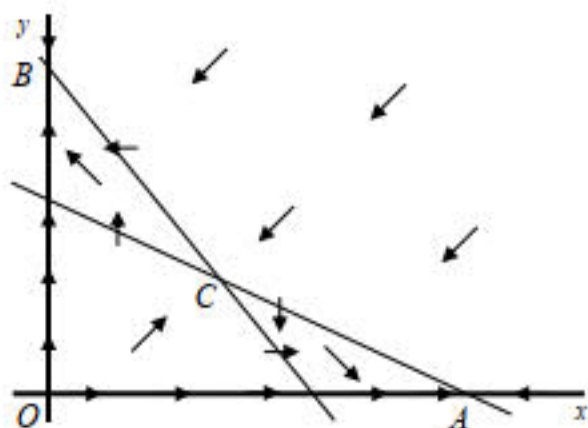
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r}{y} - \frac{bx}{y} - \alpha \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s}{x} - \frac{ey}{x} - \beta \right) = -\frac{b}{y} - \frac{e}{x} \\
 &= \frac{-(bx + ey)}{xy} < 0, \text{ untuk } x > 0 \text{ dan } y > 0.
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema Bendixon-Dulac, maka tidak ada trajektori yang tertutup pada kuadran pertama. Karena titik keseimbangan C stabil asimptotik secara lokal dan juga diketahui bahwa solusi $(x(t), y(t))$ positif dan terbatas, maka dengan Teorema Poincare-Bendixon disimpulkan bahwa titik keseimbangan C stabil asimptotik secara global di kuadran pertama.

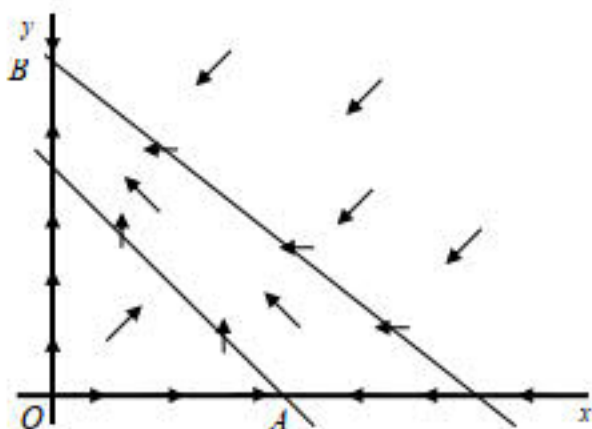
Dengan menggunakan isoklin sederhana dari model (6.2), perilaku trajektori secara kualitatif dapat diketahui. Gambar-gambar berikut merupakan beberapa kemungkinan isoklin sederhana yang dapat terjadi pada model (6.2).



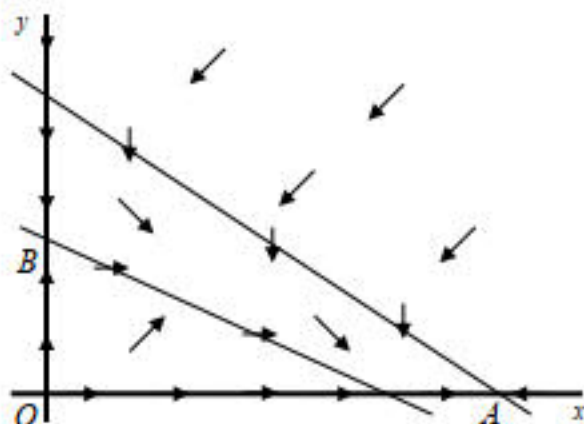
Gambar 6.2 Isoklin sederhana untuk model (6.2) dengan $er - \alpha s > 0$, $bs - \beta r > 0$, dan $be - \alpha \beta > 0$



Gambar 6.3 Isoklin sederhana untuk model (6.2) dengan $er - a\sigma < 0$, $bs - \beta r < 0$, dan $be - \alpha\beta < 0$



Gambar 6.4 Isoklin sederhana untuk model (6.2) dengan $er - a\sigma < 0$, $bs - \beta r > 0$, dan $be - \alpha\beta > 0$



Gambar 6.5 Isoklin sederhana untuk model (6.2) dengan $er - as > 0$, $bs - \beta r < 0$, dan $be - \alpha\beta > 0$

Titik O merupakan suatu titik keseimbangan yang tidak stabil, ia merupakan titik node. Kedua nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan O bernilai real dan positif. Dari Gambar 6.2 sampai dengan Gambar 6.5 diketahui bahwa sekiranya kurva solusi pada awalnya berada di sekitar titik keseimbangan O maka selanjutnya kurva solusi tersebut akan menjauhi titik keseimbangan tersebut.

Untuk menganalisis kestabilan titik A , diasumsikan bahwa $bs - \beta r \neq 0$. Asumsi ini diperlukan untuk menjamin bahwa determinan dari matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan A tidak bernilai nol. Jika $bs - \beta r > 0$ (Gambar 6.2 dan Gambar 6.4) maka titik keseimbangan A tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Sebaliknya jika $bs - \beta r < 0$

(Gambar 6.3 dan Gambar 6.5) maka titik keseimbangan A stabil asimtotik secara lokal, ia merupakan titik node. Jika kurva solusi pada awalnya berada cukup dekat dengan titik keseimbangan A , maka selanjutnya kurva solusi tersebut akan menuju ke titik keseimbangan A .

Untuk menganalisis kestabilan titik B , diasumsikan bahwa $er - \alpha s \neq 0$. Asumsi ini diperlukan untuk menjamin bahwa determinan dari matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan B tidak bernilai nol. Jika $er - \alpha s > 0$ (Gambar 6.2 dan Gambar 6.5) maka titik keseimbangan B tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Sebaliknya jika $er - \alpha s < 0$ (Gambar 6.3 dan Gambar 6.4) maka titik keseimbangan B stabil asimtotik secara lokal, ia merupakan suatu node. Jika kurva solusi pada awalnya berada cukup dekat dengan titik keseimbangan B , maka selanjutnya kurva solusi tersebut akan menuju ke titik keseimbangan B .

Untuk menganalisis kestabilan titik C , diasumsikan bahwa $\frac{er - \alpha s}{be - \alpha \beta}$ dan $\frac{bs - \beta r}{be - \alpha \beta}$ keduanya bernilai positif. Asumsi ini diperlukan untuk menjamin bahwa titik keseimbangan C berada pada kuadran pertama, yaitu titik keseimbangan bernilai positif. Asumsi ini juga diperlukan supaya titik keseimbangan C merupakan titik yang terisolasi pada kuadran pertama. Matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan C diberikan sebagai

$$J = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

dimana

$$P = -b \left(\frac{er - \alpha s}{be - \alpha \beta} \right)$$

$$Q = -\alpha \left(\frac{er - \alpha s}{be - \alpha \beta} \right)$$

$$R = -\beta \left(\frac{bs - \beta r}{be - \alpha \beta} \right), \text{ dan}$$

$$S = -d \left(\frac{bs - \beta r}{be - \alpha \beta} \right).$$

Selanjutnya diperoleh $\det(J) = \frac{(er - \alpha s)(bs - \beta r)}{(be - \alpha \beta)}$ dan persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan titik keseimbangan C diberikan sebagai

$$f(r) = r^2 - (P + S)r + (PS - QR). \quad (6.3)$$

Untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan C , nilai $\frac{er - \alpha s}{be - \alpha \beta}$ dan $\frac{bs - \beta r}{be - \alpha \beta}$ ditinjau dalam dua kasus.

Kasus 1 $er - \alpha s > 0$, $bs - \beta r > 0$, dan $be - \alpha \beta > 0$

Dalam kasus ini diperoleh $\det(J) > 0$ dan dari persamaan karakteristik (6.3) diperoleh $(PS - QR) > 0$ dan $-P - S > 0$. Dengan demikian disimpulkan bahwa titik keseimbangan C merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, ia merupakan trajektori atraktor untuk model (6.2). Jika kurva solusi pada awalnya berada pada kuadran pertama

maka selanjutnya kurva solusi tersebut akan menuju ke titik keseimbangan C .

Kasus 2 $er - \alpha s < 0$, $bs - \beta r < 0$, dan $be - \alpha\beta < 0$

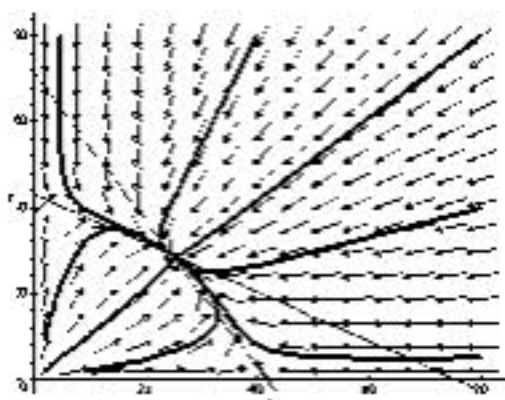
Dalam kasus ini diperoleh $\det(J) < 0$ dan dari persamaan karakteristik (6.3) diperoleh $(PS - QR) < 0$ dan $-P - S > 0$. Dengan demikian disimpulkan bahwa titik keseimbangan C bukan merupakan suatu trajektori atraktor untuk model (6.2). Untuk mengetahui lebih jauh jenis kestabilan titik keseimbangan tersebut, maka perlu diketahui nilai eigen dari matriks Jacobinya. Nilai eigen dari matriks Jacobi dalam kasus ini adalah

$$r_1, r_2 = \frac{(P + S)}{2} \pm \sqrt{(P + S)^2 - 4(PS - QR)}.$$

Dari nilai eigen tersebut diketahui bahwa $r_1 > 0$ dan $r_2 < 0$. Dengan demikian disimpulkan bahwa titik keseimbangan C tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Kebanyakan kurva solusi yang apabila pada awalnya berada pada kuadran pertama maka selanjutnya kurva solusi tersebut akan menjauhi ke titik keseimbangan C .

Contoh 6.1 Pertimbangkan model (6.2) dengan nilai parameter $r = 1,50$, $b = 0,036$, $s = 1,51$, $e = 0,035$, $\alpha = 0,021$, dan $\beta = 0,020$. Dengan nilai parameter tersebut kasus 1 terpenuhi, dan diperoleh titik keseimbangan $O = (0, 0)$, $A = (41,67, 0)$, $B = (0, 43,14)$, dan $C = (24,75, 29,00)$. Nilai eigen yang

bersesuaian dengan titik keseimbangan $C = (24,75, 29,00)$ adalah $-0,40046$ dan $-1,50554$. Hal ini bermakna bahwa titik keseimbangan C stabil asimptotik. Beberapa trajektori di sekitar titik keseimbangan O , A , B , dan C serta medan vektor diberikan pada Gambar 6.6.



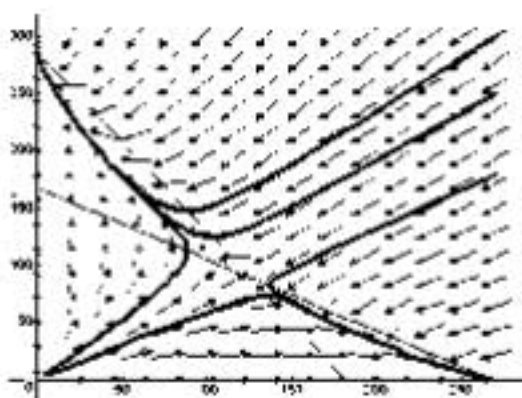
Gambar 6.6 Medan vektor dan beberapa trajektori di sekitar titik keseimbangan C yang stabil

Dari Gambar 6.6 juga diketahui bahwa titik keseimbangan $O = (0, 0)$ tidak stabil, titik keseimbangan $A = (41,67, 0)$ tidak stabil, dan titik keseimbangan $B = (0, 43,14)$ juga tidak stabil. Jika $(x(0), y(0))$ berada pada kuadran pertama, maka $(x(t), y(t))$ akan tetap berada pada kuadran pertama dan akan menuju ke titik keseimbangan $C = (24,75, 29,00)$. Sementara jika $(x(0), y(0))$ berada pada sumbu x positif maka selanjutnya $(x(t), y(t))$ akan menuju ke

titik $A = (41,67, 0)$ dan jika $(x(0), y(0))$ berada pada sumbu y positif maka $(x(t), y(t))$ akan menuju ke titik $B = (0, 43,14)$.

Bagi populasi x dan populasi y yang berkompetisi dengan model laju pertumbuhannya mengikuti model (6.2) dengan nilai parameter model seperti yang diberikan pada Contoh 6.1 dapat disimpulkan bahwa jika pada awalnya kedua ukuran populasi bernilai positif, yaitu $x(0) > 0$ dan $y(0) > 0$, maka kedua populasi tersebut akan tetap bernilai positif dan nilainya akan menuju ke titik keseimbangannya, yaitu titik $C = (24,75, 29,00)$. Dengan perkataan lain, kedua populasi yang berkompetisi akan tetap wujud (*coexist*) yang pada akhirnya populasi x akan menuju ke nilai 24,75 dan pada saat yang sama populasi y akan menuju ke nilai 29,00.

Contoh 6.2 Pertimbangkan model (6.2) dengan nilai parameter $r = 2,01$, $b = 0,0075$, $s = 2,00$, $e = 0,007$, $\alpha = 0,012$, dan $\beta = 0,011$. Dengan nilai parameter tersebut kasus 2 terpenuhi, dan diperoleh titik keseimbangan $O = (0, 0)$, $A = (268, 0)$, $B = (0, 285,71)$, dan $C = (124,90566, 89,43396)$. Nilai eigen yang bersesuaian dengan titik keseimbangan C adalah $-2,00562$ dan $0,44279$. Dari nilai eigen tersebut disimpulkan bahwa titik keseimbangan C tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Beberapa trajektori di sekitar titik keseimbangan O , A , B , dan C serta medan vektor diberikan pada Gambar 6.7.



Gambar 6.7 Medan vektor dan beberapa trajektori di sekitar titik keseimbangan C yang tidak stabil

Gambar 6.7 menunjukkan bahwa titik keseimbangan C merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil. Jika populasi pada awalnya tepat berada pada kondisi seimbang, yaitu $(x(0), y(0)) = (124,90566, 89,43396)$, maka $(x(t), y(t))$ selanjutnya akan tetap berada pada titik keseimbangan C . Tetapi sekiranya $(x(0), y(0)) \neq (124,90566, 89,43396)$ maka secara umum $(x(t), y(t))$ selanjutnya akan menuju ke titik keseimbangan $A = (268, 0)$ atau menuju ke titik keseimbangan $B = (0, 285,71)$.

Dari Gambar 6.7 juga diketahui bahwa titik keseimbangan $O = (0, 0)$ tidak stabil, titik keseimbangan $A = (268, 0)$ dan $B = (0, 285,71)$ stabil asimptotik secara lokal. Jika $(x(0), y(0))$ berada pada kuadran pertama dan cukup dekat

dengan titik keseimbangan $A = (268, 0)$, maka $(x(t), y(t))$ akan menuju ke titik keseimbangan $A = (268, 0)$. Kondisi ini menyatakan bahwa populasi x akan menuju ke nilai 268 dan pada saat yang sama populasi y akan punah. Demikian juga jika $(x(0), y(0))$ berada pada kuadran pertama dan cukup dekat dengan titik keseimbangan $B = (0, 285,71)$, maka $(x(t), y(t))$ akan menuju ke titik keseimbangan $B = (0, 285,71)$. Kondisi ini menyatakan bahwa populasi y akan menuju ke nilai 285,71 dan pada saat yang sama populasi x akan menuju ke kepunahan.

Kepunahan populasi x atau populasi y dalam kasus $er - as > 0$, $bs - br > 0$, dan $be - a\beta > 0$ tidak hanya dipengaruhi oleh kemampuan populasi untuk berkompetisi tetapi juga dipengaruhi oleh posisi nilai awal kedua populasi tersebut. Mungkin saja terjadi populasi x lebih kuat berkompetisi daripada populasi y , tetapi karena populasi awal x cukup dekat ke titik keseimbangan B , maka populasi y akan menuju ke titik keseimbangan B , yang bermakna bahwa populasi y akan tetap wujud. Sementara itu populasi x menuju ke kepunahan. Demikian juga sebaliknya, jika populasi y lebih kuat berkompetisi daripada populasi x , tetapi karena populasi awal y cukup dekat ke titik keseimbangan A , maka populasi x akan menuju ke titik keseimbangan A , yang bermakna bahwa populasi x akan tetap wujud. Sementara itu populasi y menuju ke kepunahan. Contoh ini merupakan suatu kondisi dari prinsip kompetisi eksklusif (*competitive exclusion*), yaitu kondisi dimana salah satu populasi yang berkompetisi akan punah.

Pada Gambar 6.7 dapat dilihat bahwa sebenarnya terdapat suatu garis pemisah pada kuadran pertama, yaitu garis yang memisahkan kurva-kurva solusi yang menuju ke titik

keseimbangan $A = (268, 0)$ dan kurva-kurva solusi yang menuju ke titik keseimbangan $B = (0, 285.71)$. Garis-garis pemisah tersebut sebenarnya adalah gabungan dari dua kurva solusi yang menuju ke titik keseimbangan $C = (124,90566, 89,43396)$. Garis pemisah tersebut dapat ditelusuri dengan memperhatikan arah-arah dari medan vektor yang mengarah ke titik keseimbangan C .

6.3 Model kompetisi dua populasi dengan usaha pemanenan konstan

Pada bagian ini dipertimbangkan bahwa kedua populasi yang berkompetisi dikenakan pemanenan dengan usaha pemanenan konstan. Dengan pertimbangan tersebut model (6.2) dikembangkan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx - bx^2 - \alpha xy - q_x E_x x \\ \frac{dy}{dt} &= sy - ey^2 - \beta xy - q_y E_y y. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Parameter q_x dan q_y pada model (6.4) berturut-turut menyatakan koefisien ketertangkapan untuk populasi x dan populasi y yang diasumsikan bernilai positif. Parameter E_x dan E_y berturut-turut menyatakan usaha pemanenan yang dikenakan pada populasi x dan populasi y . Selanjutnya, untuk keperluan analisis, sebagai penyederhanaan, diasumsikan $q_x = q_y = 1$. Dengan penyederhanaan tersebut, model (6.4) tereduksi menjadi model

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx - bx^2 - \alpha xy - E_x x \\ \frac{dy}{dt} &= sy - ey^2 - \beta xy - E_y y.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Model (6.5) juga menyatakan bahwa populasi x dipanen dengan laju pemanenan proporsional dengan ukuran populasi x . Demikian juga untuk populasi y . Dengan perkataan lain, kedua populasi yang berkompetisi dipanen dengan usaha pemanenan konstan.

Dengan memisalkan $m = r - E_x$ dan $n = s - E_y$, dan selanjutnya diasumsikan bahwa m dan n keduanya bernilai positif. Asumsi ini diberikan untuk menjamin kedua populasi dapat bertumbuh, yaitu usaha pemanenan tidak melebihi laju pertumbuhan intrinsik populasi. Dengan pemisalan tersebut, model (6.5) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= mx - bx^2 - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= ny - ey^2 - \beta xy.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Model (6.6) secara matematis serupa dengan model (6.2) yang mempunyai tiga atau empat titik keseimbangan, yaitu

$$O_1 = (0, 0), \quad A_1 = \left(\frac{m}{b}, 0\right), \quad B_1 = \left(0, \frac{n}{e}\right), \quad \text{dan}$$

$$C_1 = \left(\frac{em - \alpha n}{be - \alpha\beta}, \frac{bn - \beta m}{be - \alpha\beta}\right).$$

Kewujudan titik keseimbangan C_1 bergantung pada nilai $em - \alpha n$, $bn - \beta m$, dan $be - \alpha\beta$. Matriks Jacobi dari model (6.6) dinyatakan sebagai

$$J := \begin{pmatrix} m - 2bx - \alpha y & -\alpha x \\ -\beta y & n - 2ey - \beta x \end{pmatrix}.$$

Titik keseimbangan O_1 merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil dan merupakan suatu node. Kedua nilai eigen dari matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan tersebut bernilai real dan positif.

Untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan A_1 , diasumsikan bahwa $m\beta - bn \neq 0$ yaitu $\beta E_x - bE_y \neq r\beta - sb$. Asumsi ini diperlukan untuk menjamin determinan dari matriks Jacobi tidak bernilai nol dan selanjutnya nilai eigen dari matriks Jacobi tersebut tidak ada yang bernilai nol. Hal ini disebabkan karena analisis kestabilan yang ditinjau hanyalah analisis kestabilan lokal. Nilai eigen dari matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan A_1 adalah $r_1 = -m < 0$ dan $r_2 = \frac{bn - \beta m}{b}$.

Untuk mengetahui jenis kestabilan titik keseimbangan A_1 , ada dua kondisi yang akan ditinjau. Kondisi yang pertama adalah yaitu $bs - \beta r < 0$. Kondisi $bs - \beta r < 0$ mengakibatkan titik keseimbangan A untuk model (6.2) stabil asimptotik. Selanjutnya jika $(E_x, E_y) \in R$ dengan

$$R = \left\{ (E_x, E_y) \mid \beta E_x - bE_y > r\beta - sb, 0 < E_x < r, 0 < E_y < s \right\},$$

maka titik keseimbangan A_1 tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Dengan perkataan lain, jika pasangan berurut usaha pemanenan yang dikenakan memenuhi $(E_x, E_y) \in R$, maka titik keseimbangan A_1 menjadi tidak stabil. Tetapi jika pasangan

berurut usaha pemanenan yang dikenakan memenuhi $(E_s, E_r) \in R_2$ dengan

$$R_2 = \{ (E_s, E_r) \mid \beta E_s - b E_r < r\beta - sb, 0 < E_s < r, 0 < E_r < s \},$$

maka titik keseimbangan A_1 tetap merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik. Dengan perkataan lain, usaha pemanenan yang dikenakan tidak mengubah kestabilan titik keseimbangan dari model sebelum dikenakan pemanenan.

Kondisi kedua yaitu, $bs - \beta r > 0$. Kondisi $bs - \beta r > 0$ mengakibatkan titik keseimbangan A untuk model (6.2) tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Selanjutnya jika $(E_s, E_r) \in R_3$ dengan

$$R_3 = \{ (E_s, E_r) \mid b E_s - \beta E_r > sb - r\beta, 0 < E_s < r, 0 < E_r < s \},$$

maka titik keseimbangan A_1 merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, ia merupakan suatu node. Dalam kondisi ini usaha pemanenan yang dikenakan mengubah kestabilan titik keseimbangan dari model sebelum dikenakan pemanenan. Sebaliknya jika $(E_s, E_r) \in R_4$ dengan

$$R_4 = \{ (E_s, E_r) \mid b E_s - \beta E_r < sb - r\beta, 0 < E_s < r, 0 < E_r < s \},$$

maka titik keseimbangan A_1 juga merupakan titik keseimbangan yang tidak stabil, ia merupakan titik pelana.

Analisis kestabilan untuk titik keseimbangan B_1 serupa dengan analisis kestabilan untuk titik keseimbangan A_1 . Meskipun kedua titik keseimbangan A_1 dan B_1 mungkin stabil pada suatu kondisi yang sama, tetapi salah satu dari populasi

akan menuju ke kepunahan. Terdapat suatu pasangan berurut usaha pemanenan yang memungkinkan kedua titik keseimbangan A_1 dan B_1 stabil. Tetapi dengan usaha pemanenan tersebut dan dengan kondisi awal populasi tertentu, maka salah satu dari kedua populasi akan punah.

Untuk memeriksa kestabilan titik C_1 , diasumsikan bahwa $\alpha E_y - e E_x \neq \alpha s - er$, $\beta E_x - b E_y \neq r\beta - bs$, dan $be \neq \alpha\beta$. Matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan C_1 diberikan sebagai

$$J = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ R_1 & S_1 \end{pmatrix},$$

dimana

$$P_1 = -b \left(\frac{em - cn}{be - \alpha\beta} \right)$$

$$Q_1 = -\alpha \left(\frac{em - cn}{be - \alpha\beta} \right)$$

$$R_1 = -\beta \left(\frac{bn - \beta m}{be - \alpha\beta} \right), \text{ dan}$$

$$S_1 = -d \left(\frac{bn - \beta m}{be - \alpha\beta} \right),$$

$$\text{dengan } \det(J) = \frac{(em - cn)(bn - \beta m)}{(be - \alpha\beta)}.$$

Terdapat dua kondisi dimana titik keseimbangan C_1 wujud pada kuadran pertama yaitu jika $\alpha E_y - e E_x > \alpha s - er$, $\beta E_x - b E_y > r\beta - bs$, dan $be > \alpha\beta$ atau jika

$\alpha E_y - e E_x < \alpha s - er$, $\beta E_x - b E_y < r\beta - bs$, dan $be < \alpha\beta$. Untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan C_1 , akan ditinjau dalam beberapa kasus.

Kasus 1 $\alpha E_y - e E_x < \alpha s - er$, $\beta E_x - b E_y < r\beta - bs$, dan $be < \alpha\beta$

Dalam kasus ini, titik keseimbangan C_1 tidak stabil, ia merupakan titik pelana. Kondisi ini serupa dengan Gambar 6.3. Jika pasangan berurut usaha pemanenan yang dikenakan memenuhi kasus 1, maka secara umum salah satu populasi akan menuju ke kepunahan.

Kasus 2 $er - \alpha s > 0$, $bs - r\beta > 0$, dan $be > \alpha\beta$

Dalam kasus ini, untuk menjamin titik keseimbangan C_1 berada pada kuadran pertama, maka diperlukan lagi pembatasan nilai parameter

$$em - \alpha n > 0, \text{ yaitu } eE_x - \alpha E_y < er - \alpha s, \text{ dan}$$

$$nb - \beta m > 0, \text{ yaitu } bE_y - \beta E_x < bs - \beta r.$$

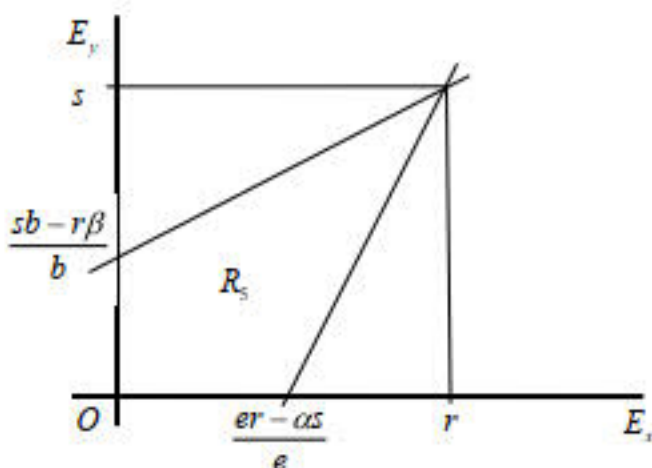
Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan C_1 dinyatakan sebagai

$$f(r) = r^2 - (P_1 + S_1)r + (P_1S_1 - Q_1R_1).$$

Dengan kondisi tersebut, maka diperoleh $\det(J) > 0$ dan selanjutnya diperoleh $(P_1 S_1 - Q_1 R_1) > 0$ dan $-P_1 - S_1 > 0$. Dengan demikian disimpulkan bahwa jika pasangan berurut usaha pemanenan yang dikenakan pada populasi memenuhi $(E_x, E_y) \in R_s$ dengan

$$R_s = \left\{ (E_x, E_y) \mid eE_x - \alpha E_y < er - \alpha s, bE_y - \beta E_x < bs - \beta r, 0 < E_x < r, 0 < E_y < s \right\},$$

maka titik keseimbangan C_1 merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, ia merupakan suatu node. Daerah dimana pasangan berurut usaha pemanenan yang membuat titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik diberikan pada Gambar 6.8.

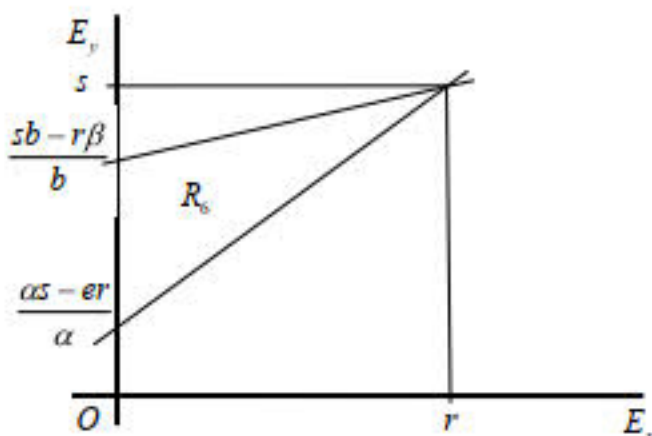


Gambar 6.8 Daerah R_s dimana titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik

Dengan kondisi tersebut, maka diperoleh $\det(J) > 0$ dan selanjutnya diperoleh $(P_1 S_1 - Q_1 R_1) > 0$ dan $-P_1 - S_1 > 0$. Dengan demikian disimpulkan bahwa jika pasangan berurut usaha pemanenan yang dikenakan pada populasi memenuhi $(E_x, E_y) \in R_0$ dengan

$$R_0 = \left\{ (E_x, E_y) \mid \begin{aligned} &\alpha E_y - e E_x > \alpha s - e r, \quad b E_y - \beta E_x < b s - \beta r, \\ &0 < E_x < r, \quad 0 < E_y < s \end{aligned} \right\},$$

maka titik keseimbangan C_1 merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, ia merupakan suatu node. Daerah dimana pasangan berurut usaha pemanenan yang membuat titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik diberikan pada Gambar 6.9.



Gambar 6.9 Daerah R_0 dimana titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik

Kasus 4 $er - \alpha s > 0$, $bs - r\beta < 0$, dan $be > \alpha\beta$

Dalam kasus ini, untuk menjamin titik keseimbangan C_1 berada pada kuadran pertama, maka diperlukan lagi pembatasan nilai parameter

$$em - \alpha n > 0, \text{ yaitu } eE_x - \alpha E_y < er - \alpha s, \text{ dan}$$

$$nb - \beta m > 0, \text{ yaitu } \beta E_x - bE_y > \beta r - bs.$$

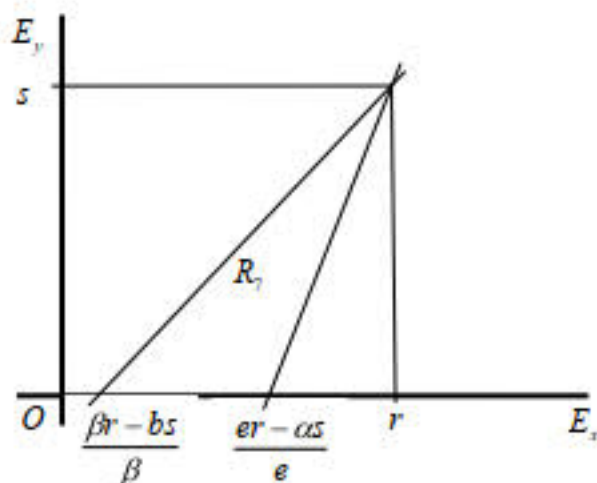
Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobi yang bersesuaian dengan titik keseimbangan C_1 dinyatakan sebagai

$$f(r) = r^2 - (P_1 + S_1)r + (P_1S_1 - Q_1R_1).$$

Dengan kondisi tersebut, maka diperoleh $\det(J) > 0$ dan selanjutnya diperoleh $(P_1S_1 - Q_1R_1) > 0$ dan $-P_1 - S_1 > 0$. Dengan demikian disimpulkan bahwa jika pasangan berurut usaha pemanenan yang dikenakan pada populasi memenuhi $(E_x, E_y) \in R_1$ dengan

$$R_1 = \left\{ (E_x, E_y) \mid \begin{array}{l} eE_x - \alpha E_y < er - \alpha s, \beta E_x - bE_y > \beta r - bs, \\ 0 < E_x < r, 0 < E_y < s \end{array} \right\},$$

maka titik keseimbangan C_1 merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, ia merupakan suatu node. Daerah dimana pasangan berurut usaha pemanenan yang membuat titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik diberikan pada Gambar 6.10.



Gambar 6.10 Daerah R , dimana titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik

Dalam kondisi $er - as > 0$, $bs - r\beta > 0$, dan $be > a\beta$, serta $(E_x, E_y) \in R$, telah diketahui bahwa titik keseimbangan $C_1 = (x_*, y_*)$ merupakan titik keseimbangan yang stabil asimptotik, dimana $(x_*, y_*) = \left(\frac{em - an}{be - a\beta}, \frac{bn - \beta m}{be - a\beta} \right)$. Dalam kondisi ini, titik keseimbangan $C_1 = (x_*, y_*)$ yang stabil asimptotik dihubungkan dengan persoalan hasil tangkapan maksimal yang berkelanjutan (*maximum sustainable yield problem*).

Seperti yang telah didefinisikan pada bab sebelumnya bahwa jumlah tangkapan (Y) bergantung pada usaha pemanenan dan stok (populasi), maka fungsi tangkapan pada titik

keseimbangan $C_1 = (x_1, y_1)$ yang bergantung pada usaha pemanenan E_x dan E_y , dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 Y &= E_x x_1 + E_y y_1 \\
 &= E_x \left(\frac{er - eE_x - \alpha s + \alpha E_y}{be - \alpha\beta} \right) + E_y \left(\frac{bs - bE_y - \beta r + \beta E_x}{be - \alpha\beta} \right) \\
 &= \frac{(er - \alpha s) E_x + (bs - \beta r) E_y + (\alpha + \beta) E_x E_y - eE_x^2 - bE_y^2}{be - \alpha\beta}.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Selanjutnya akan ditentukan pasangan usaha pemanenan E_x dan E_y sedemikian sehingga fungsi tangkapan maksimal. Untuk menentukan titik kritis pada fungsi tangkapan Y , maka perlu ditentukan titik stasioner dari fungsi tangkapan, yaitu dengan menyelesaikan $\frac{\partial Y}{\partial E_x} = 0$ dan $\frac{\partial Y}{\partial E_y} = 0$. Dari persamaan

(6.7) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Y}{\partial E_x} &= \frac{(er - \alpha s) + (\alpha + \beta) E_y - 2eE_x}{(be - \alpha\beta)} = 0 \\
 \frac{\partial Y}{\partial E_y} &= \frac{(bs - \beta r) + (\alpha + \beta) E_x - 2bE_y}{(be - \alpha\beta)} = 0
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

dan

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial E_x^2} = -\frac{2e}{(be - \alpha\beta)}, \tag{6.9a}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial E_x \partial E_x} = \frac{\partial^2 Y}{\partial E_x \partial E_y} = \frac{(\alpha + \beta)}{(be - \alpha\beta)}, \text{ dan} \tag{6.9b}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial E_x^2} = -\frac{2b}{(be - \alpha\beta)} \quad (6.9c)$$

Titik kritis yang diperoleh dari persamaan (6.8) diberikan sebagai (E_x^*, E_y^*) , dimana

$$E_x^* = \frac{2b(er - \alpha s) + (\alpha + \beta)(bs - \beta r)}{4be - (\alpha + \beta)^2}, \text{ dan}$$

$$E_y^* = \frac{2e(bs - \beta r) + (\alpha + \beta)(er - \alpha s)}{4be - (\alpha + \beta)^2}.$$

Supaya titik kritis (E_x^*, E_y^*) bernilai positif, yaitu $E_x^* > 0$ dan $E_y^* > 0$, maka haruslah $4be - (\alpha + \beta)^2 > 0$. Asumsi ini perlu mengingat usaha pemanenan haruslah bernilai positif.

Dengan menggantikan nilai E_x^* dan E_y^* ke dalam persamaan (6.9) diperoleh determinan matriks D sebagai

$$|D| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Y}{\partial E_x^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial E_x \partial E_y} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial E_y \partial E_x} & \frac{\partial^2 Y}{\partial E_y^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4be - (\alpha + \beta)^2}{(be - \alpha\beta)^2}.$$

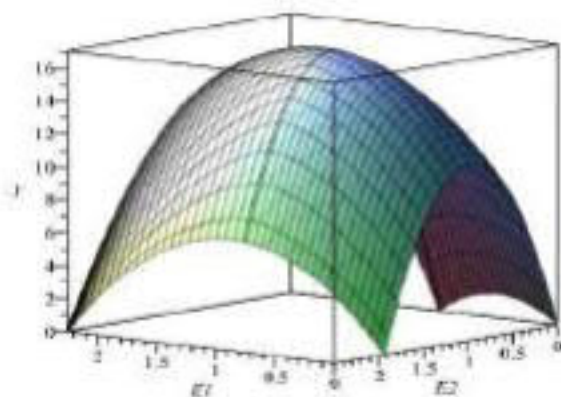
Dari kalkulus, diketahui bahwa titik kritis (E_x^*, E_y^*) memberikan nilai maksimal relatif untuk fungsi tangkapan. Perhatikan bahwa titik kritis (E_x^*, E_y^*) mungkin berada di

daerah R_5 atau di luar daerah R_5 , atau mungkin juga berada pada batas daerah R_5 .

Jika titik kritis $(E_x^*, E_y^*) \in R_5$ maka *MSY* terjadi pada puncak permukaan Y , lihat Gambar 6.11. Titik kritis (E_x^*, E_y^*) mengakibatkan titik keseimbangan $C_1 = (x_*, y_*)$ stabil asimptotik dan juga memberikan tangkapan maksimal.

Contoh 6.3 Pertimbangkan model (6.5) dengan nilai parameter $r = 2,25$, $b = 0,2$, $s = 2,5$, $e = 0,1$, $\alpha = 0,05$, dan $\beta = 0,05$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik kritis untuk fungsi tangkapan $(E_x^*, E_y^*) = (1,1250, 1,2500)$ dan titik keseimbangan $C_1 = (x_*, y_*) = (2,85714, 11,07142)$. Titik keseimbangan C_1 stabil asimptotik dan berada pada daerah R_5 . Dengan nilai usaha pemanenan $(E_x^*, E_y^*) = (1,1250, 1,2500)$ diperoleh nilai Y maksimal sebesar 17,05357. Plot kurva permukaan Y diberikan pada Gambar 6.11.

Ketika titik kritis (E_x^*, E_y^*) yang merupakan titik stasioner tidak berada pada daerah R_5 dan juga tidak berada pada batas daerah R_5 , maka puncak permukaan Y tidak menyatakan suatu *MSY*. Tetapi nampaknya *MSY* akan terjadi pada suatu titik (E_x^*, E_y^*) yang berada pada batas daerah R_5 . Jika titik kritis (E_x^*, E_y^*) berada pada batas daerah R_5 , maka puncak dari permukaan Y tetap menyatakan suatu *MSY*.



Gambar 6.11 Kurva permukaan Y

Dalam kasus titik kritis $(E_x^*, E_y^*) = (E_x^*, E_y^*)$, maka titik (E_x^*, E_y^*) unik. Titik (E_x^*, E_y^*) ini juga merupakan suatu titik kritis karena titik tersebut merupakan batas pada daerah R_2 . MSY terjadi pada perpotongan antara permukaan Y dan proyeksi garis batas daerah R_2 yang memuat titik kritis (E_x^*, E_y^*) . Proyeksi garis batas yang memuat titik kritis (E_x^*, E_y^*) merupakan suatu parabola dan titik kritis (E_x^*, E_y^*) memberikan nilai maksimal pada parabola tersebut. Nilai maksimal tersebut sekaligus menyatakan MSY . Bagaimanapun juga, ketika $(E_x^*, E_y^*) \notin R_2$ maka MSY terjadi pada titik percabangan (E_x^*, E_y^*) dan dengan itu mengakibatkan titik keseimbangan $C_1 = (x_s, y_s)$ menjadi tidak stabil.

6.3.1 Keseimbangan bionomik

Pemahaman keseimbangan bionomik adalah suatu konsep yang mengintegrasikan keseimbangan secara biologi dan keseimbangan secara ekonomi. Keseimbangan secara ekologi diperoleh ketika populasi berada pada kondisi $\frac{dx}{dt} = 0$ dan

$\frac{dy}{dt} = 0$. Titik keseimbangan ini diperoleh dengan menyelesaikan

sistem persamaan terhadap x dan y . Titik keseimbangan ini menyatakan suatu kondisi dimana kedua populasi dalam keadaan seimbang, yaitu kedua populasi tidak mengalami perubahan karena laju pertumbuhannya nol. Keseimbangan secara ekonomi dikatakan tercapai ketika pendapatan total (TR) yang diperoleh dari penjualan stok (populasi) yang dipanen sama dengan biaya total (TC) dari usaha yang dilakukan dalam pemanenan populasi.

Misalkan

c_x = biaya pemanenan per unit usaha untuk populasi x ,

c_y = biaya pemanenan per unit usaha untuk populasi y ,

c_f = biaya tetap pemanenan untuk populasi x dan y ,

p_x = harga per unit biomassa untuk populasi x ,

p_y = harga per unit biomassa untuk populasi y .

Fungsi keuntungan dari usaha pemanenan populasi x dan y diberikan sebagai

$$\pi = p_x x E_x + p_y y E_y - c_f - c_x E_x - c_y E_y.$$

Pada kenyataannya biaya pemanenan per unit usaha tidak konstan untuk setiap saat, tetapi dalam analisis ini biaya

pemanenan diasumsikan bernilai konstan. Keseimbangan bionomik $(x_{ss}, y_{ss}, E_{ss}, E_{yss})$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan simultan berikut.

$$\begin{aligned} rx - bx^2 - \alpha xy - E_x x &= 0 \\ sy - ey^2 - \beta xy - E_y y &= 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

dan

$$\pi = p_x x E_x + p_y y E_y - c_f - c_x E_x - c_y E_y = 0. \quad (6.11)$$

Dari persamaan (6.10) diperoleh $x_{ss} = \frac{em - \alpha n}{be - \alpha\beta}$ dan $y_{ss} = \frac{bn - \beta m}{be - \alpha\beta}$, dimana $m = r - E_x$ dan $n = s - E_y$. Dengan melakukan substitusi nilai $x_{ss} = \frac{em - \alpha n}{be - \alpha\beta}$ dan $y_{ss} = \frac{bn - \beta m}{be - \alpha\beta}$ ke dalam persamaan (6.11) maka fungsi keuntungan dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{p_x (re - \alpha s + \alpha E_y - e E_x) E_x}{eb - \alpha\beta} + \frac{p_y (sb - \beta r + \beta E_x - b E_y) E_y}{eb - \alpha\beta} \\ & - c_f - c_x E_x - c_y E_y. \end{aligned}$$

Dari fungsi keuntungan tersebut diperoleh titik kritis $(E_{ss}, E_{yss}) = \left(\frac{A}{C}, \frac{B}{C} \right)$,

dimana

$$\begin{aligned}
 A &= 2p_y b p_x r e - p_y b p_x \alpha + p_x \beta^2 c_x \alpha - 2p_x b^2 c_x e + 2p_y b c_x \beta \alpha + \\
 &\quad p_x \alpha^2 c_x \beta - p_x \alpha p_y \beta r - p_x \alpha c_x e b - p_x \beta c_x e b + p_x^2 \beta s b - p_x^2 \beta^2 s, \\
 B &= -p_x^2 \alpha^2 s - p_x \beta b c_x e + p_x \beta^2 c_x \alpha + 2p_y s b p_x e - 2c_x e^2 b p_x + \\
 &\quad 2p_x \alpha \beta c_x e + p_x^2 \alpha e e - p_x \alpha b c_x e + p_x \alpha^2 c_x \beta - p_x \alpha p_y \beta s - \\
 &\quad p_y \beta p_x r e, \text{ dan} \\
 C &= 4p_y b p_x e - p_x^2 \alpha^2 - 2p_x \alpha p_y \beta - p_x^2 \beta^2.
 \end{aligned}$$

Lebih lanjut, dari fungsi keuntungan diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_x^2} &= -\frac{2p_x e}{eb - \beta \alpha}, \\
 \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_y^2} &= -\frac{2p_y b}{eb - \beta \alpha}, \text{ dan} \\
 \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_x^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_y^2} - \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_x \partial E_y} \frac{\partial^2 \pi}{\partial E_y \partial E_x} &= \frac{4p_y b p_x e - p_x^2 \alpha^2 - 2p_x \alpha p_y \beta - p_x^2 \beta^2}{(eb - \alpha \beta)^2}.
 \end{aligned}$$

Untuk memperoleh titik kritis yang bernilai real, maka harus diasumsikan $4p_y b p_x e - p_x^2 \alpha^2 - 2p_x \alpha p_y \beta - p_x^2 \beta^2 > 0$. Dengan asumsi tersebut, titik kritis (E_{xx}, E_{yy}) memaksimalkan fungsi keuntungan asalkan titik kritis (E_{xx}, E_{yy}) termuat di daerah R_3 . Jika usaha pemanenan E_{xx} dan E_{yy} diaplikasikan pada populasi x dan populasi y , maka titik keseimbangan $C_1 = (x_*, y_*)$ berada pada kuadran pertama dan juga stabil asimptotik. Usaha pemanenan E_{xx} dan E_{yy} yang berhubungan dengan titik keseimbangan $C_1 = (x_*, y_*)$ juga memaksimalkan fungsi keuntungan.

Pada model kompetisi dua populasi yang melibatkan usaha pemanenan pada kedua populasi dengan usaha pemanenan konstan diperoleh suatu level usaha pemanenan yang memaksimalkan fungsi keuntungan tanpa memengaruhi kestabilan titik keseimbangan yang stabil asimptotik. Keuntungan maksimal dapat dicapai dari usaha pemanenan kedua populasi yang berkompetisi dan kedua populasi juga dapat hidup bersama secara berkelanjutan tanpa ada populasi yang akan punah.

Contoh 6.4 Pertimbangkan model (6.6) dengan nilai parameter $r = 0,80$, $b = 0,005$, $e = 0,006$, $\alpha = 0,002$, $s = 0,90$, dan $\beta = 0,002$. Ambil nilai $p_x = 1$, $p_y = 1$, $c_f = 0,1$, $c_x = 0,5$, dan $c_y = 0,5$. Titik keseimbangan model yang berada pada kuadran pertama adalah $C_1 = (x_s, y_s)$,

dimana

$$x_s = 115,3846 + 76,9231E_y - 230,7692E_x \text{ dan}$$

$$y_s = 111,5385 + 76,9231E_x - 192,3077E_y.$$

Selanjutnya diperoleh fungsi keuntungan

$$\begin{aligned} \pi = & 114,8846E_x + 153,8462E_xE_y - 230,7692E_x^2 + 111,0385E_y \\ & - 192,3077E_y^2 - 0,1000. \end{aligned}$$

Titik kritis pada fungsi keuntungan tersebut adalah $(E_{x_{opt}}, E_{y_{opt}}) = (0,3982, 0,4480)$. Titik kritis ini memberikan keuntungan maksimal $\pi_{maks} = 47,6490$. Setelah dilakukan

substitusi nilai $E_{x_{ss}} = 0,3982$ dan $E_{y_{ss}} = 0,4480$ diperoleh titik keseimbangan $C_1^* = (x_{ss}, y_{ss}) = (57,9423, 56,0192)$. Titik keseimbangan ini juga stabil asimptotik.

6.3.2 Kebijakan pemanenan optimal

Pada bagian ini nilai sekarang (*present value*) dari fungsi keuntungan J , yaitu fungsi keuntungan yang kontinu akan dimaksimalkan. Fungsi keuntungan kontinu diberikan dalam bentuk persamaan integral

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \{ (p_x q_x x - c_x) E_x(t) + (p_y q_y y - c_y) E_y(t) \} dt \quad (6.12)$$

dimana δ menyatakan laju diskon tahunan. Disini, nilai fungsi J akan dimaksimalkan yang terkendala oleh persamaan (6.6) dengan menggunakan prinsip maksimal Pontryagin (Pontryagin, et.al., 1962). Variabel-variabel kontrol $E_x(t)$ dan $E_y(t)$ terkendala pada kondisi yang diberikan, yaitu $0 \leq E_x(t) \leq (E_x)_{maks}$ dan $0 \leq E_y(t) \leq (E_y)_{maks}$. Dalam persoalan ini usaha pemanenan $E_x(t)$ dan $E_y(t)$ ditinjau sebagai variabel-variabel kontrol dalam persoalan kontrol optimal.

Persamaan Hamilton untuk persoalan di atas diberikan oleh

$$H = e^{-\delta t} \{ (p_x q_x x - c_x) E_x + (p_y q_y y - c_y) E_y \} + \lambda_x (rx - bx^2 - \alpha xy - q_x E_x x) + \lambda_y (sy - ey^2 - \beta xy - q_y E_y y), \quad (6.13)$$

dimana $\lambda_x(t)$ dan $\lambda_y(t)$ menyatakan variabel-variabel adjoin.

Variabel-variabel kontrol E_x dan E_y linear pada persamaan Hamilton H . Dengan demikian syarat perlu untuk kontrol singular menjadi optimal adalah $\frac{\partial H}{\partial E_x} = 0$ dan $\frac{\partial H}{\partial E_y} = 0$.

Dari persamaan Hamilton (6.13) diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial E_x} = e^{-\alpha}(p, q, x - c_x) - \lambda_x q, x = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_y} = e^{-\alpha}(p, q, y - c_y) - \lambda_y q, y = 0.$$

Dari kedua persamaan tersebut diperoleh

$$\lambda_x = \frac{e^{-\alpha}(p, q, x - c_x)}{q, x} \quad (6.14)$$

dan

$$\lambda_y = \frac{e^{-\alpha}(p, q, y - c_y)}{q, y}. \quad (6.15)$$

Dari persamaan Hamilton juga diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial x} = e^{-\alpha} p, q, E_x + \lambda_x (r - 2bx - \alpha y - q, E_x) - \lambda_y \beta y \text{ dan}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = e^{-\alpha} p, q, E_y - \lambda_x \alpha x + \lambda_y (s - 2ey - \beta x - q, E_y).$$

Lebih lanjut, karena $\dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}$ atau $\dot{\lambda}_x + \frac{\partial H}{\partial x} = 0$, dan dengan itu diperoleh

$$\frac{-\delta e^{-\alpha}(p, q, x - c_x)}{q, x} + e^{-\alpha} p, q, E_x + \lambda_x (r - 2bx - \alpha y - q, E_x) - \lambda_y \beta y = 0$$

yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} & -\delta e^{-\alpha}(p, q, x - c_x) + e^{-\alpha} p, q, x^2 E_x + \\ & \lambda_x q, x (r - 2bx - \alpha y - q, E_x) - \lambda_y \beta y q, x = 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Sekali lagi, karena $\dot{\lambda}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}$ atau $\dot{\lambda}_y + \frac{\partial H}{\partial y} = 0$, dengan itu diperoleh

$$\frac{-\delta e^{-\alpha}(p, q, y - c_y)}{q, y} + e^{-\alpha} p, q, E_y - \lambda_x \alpha x + \lambda_y (s - 2ey - \beta x - q, E_y) = 0$$

yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} & -\delta e^{-\alpha}(p, q, y - c_y) + e^{-\alpha} p, q, y^2 E_y - \lambda_x \alpha x q, y + \\ & \lambda_y q, y (s - 2ey - \beta x - q, E_y) = 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Setelah melakukan substitusi nilai $\lambda_x = \frac{e^{-\alpha}(p, q, x - c_x)}{q, x}$

dan $\lambda_y = \frac{e^{-\alpha}(p, q, y - c_y)}{q, y}$ ke dalam persamaan (6.16) dan (6.17)

dan kemudian diselesaikan secara simultan dalam E_x dan E_y , diperoleh

$$\begin{aligned} E_x^* = \frac{1}{q, q, c_x} \{ & \delta p, q, x q, - \delta c, q, - r q, p, q, x + r q, c_x + 2x^2 b q, p, q, \\ & - 2x b q, c_x + \alpha y q, p, q, x - \alpha y q, c_x + \beta q, x p, q, y - \beta q, x c_x \} \end{aligned} \quad (6.18)$$

dan

$$E_y^* = \frac{1}{q_1 q_2 c_2} \left\{ \alpha p_1 q_1 y q_2 - \alpha c_1 q_1 + \alpha q_1 y p_1 q_1 x - \alpha q_1 y c_2 - s q_1 p_1 q_1 y + s q_1 c_2 + 2 y^2 e q_1 p_1 q_1 - 2 e y q_1 c_2 + \beta x q_1 p_1 q_1 y - \beta x q_1 c_2 \right\}. \quad (6.19)$$

Substitusikan nilai titik keseimbangan

$$x = \frac{re - \alpha s + \alpha q_1 E_y - q_1 e E_x}{eb - \alpha \beta} \quad \text{dan} \quad y = \frac{sb - \beta r + \beta q_1 E_x - q_1 b E_y}{eb - \alpha \beta}$$

ke dalam persamaan (6.18) dan (6.19). Setelah itu, persamaan (6.18) dan (6.19) diselesaikan secara simultan untuk mendapatkan nilai optimal variabel-variabel kontrol E_x^* dan E_y^* . Selanjutnya nilai optimal variabel-variabel kontrol E_x^* dan E_y^* disubstitusi kembali ke nilai titik keseimbangan, yaitu

$$x = \frac{re - \alpha s + \alpha q_1 E_y - q_1 e E_x}{eb - \alpha \beta} \quad \text{dan} \quad y = \frac{sb - \beta r + \beta q_1 E_x - q_1 b E_y}{eb - \alpha \beta}$$

untuk mendapatkan titik keseimbangan model.

Usaha pemanenan E_x^* dan E_y^* serta nilai dari titik keseimbangan model, yaitu $x = \frac{re - \alpha s + \alpha q_1 E_y - q_1 e E_x}{eb - \alpha \beta}$ dan

$$y = \frac{sb - \beta r + \beta q_1 E_x - q_1 b E_y}{eb - \alpha \beta}$$

memaksimalkan fungsi nilai sekarang, persamaan (6.12).

Dengan menggunakan prinsip maksimal Pontryagin, diperoleh suatu lintasan usaha pemanenan yang optimal, dalam hal ini lintasan optimal usaha pemanenan merupakan suatu lintasan yang konstan. Demikian juga diperoleh lintasan optimal

untuk variabel-variabel adjoin, dimana lintasan kedua variabel adjoin tersebut merupakan suatu fungsi turun. Lintasan optimal usaha pemanenan dan lintasan optimal variabel-variabel adjoin memaksimalkan fungsi nilai sekarang dan titik keseimbangan yang bersesuaian dengan lintasan-lintasan optimal tersebut juga tetap stabil asimptotik.

Contoh 6.5 Pertimbangkan model (6.6) dengan nilai parameter $r = 0,80$, $b = 0,005$, $e = 0,006$, $\alpha = 0,002$, $\varepsilon = 0,90$, dan $\beta = 0,002$. Ambil nilai $p_x = 1$, $p_y = 1$, $q_x = 1$, $q_y = 1$, $c_x = 0,5$, $c_y = 0,5$, dan $\delta = 0,005$. Dengan nilai-nilai parameter tersebut, diperoleh titik keseimbangan optimal $(x, y) = (x_t, y_t)$ dengan

$$x_t = 115,3846 + 76,9231E_y - 230,7692E_x, \text{ dan}$$

$$y_t = 111,5385 + 76,9231E_x - 192,3077E_y,$$

serta variabel-variabel adjoin

$$\lambda_x = \frac{e^{-0,005t} (114,8846 + 76,9231E_y - 230,7692E_x)}{115,3846 + 76,9231E_y - 230,7692E_x}, \text{ dan}$$

$$\lambda_y = \frac{e^{-0,005t} (111,0385 + 76,9231E_x - 192,3077E_y)}{111,5385 + 76,9231E_x - 192,3077E_y}.$$

Selanjutnya diperoleh nilai usaha pemanenan optimal $E_x^* = 0,4007$ dan $E_y^* = 0,4505$ yang bersesuaian dengan titik keseimbangan optimal. Dengan mensubstitusikan nilai $E_x^* = 0,4007$ dan $E_y^* = 0,4505$ diperoleh titik keseimbangan optimal $(x, y) = (57,5610, 55,7334)$ dan variabel-variabel adjoin

$\lambda_x = 0,9813e^{-0,005t}$ dan $\lambda_y = 0,9910e^{-0,005t}$. Lebih lanjut, diperoleh fungsi nilai sekarang yang maksimal sebesar $J = \int_0^{\infty} 47,7474 e^{-0,005t} dt = 9.549,4723$.

6.4 Model kompetisi dua populasi dengan fungsi pemanenan bergantung pada waktu

Pada bagian ini, model laju pertumbuhan populasi yang dinyatakan oleh model (6.1) dikembangkan dengan mempertimbangkan fungsi laju pemanenan pada kedua populasi bergantung pada waktu pemanenan. Sebelum pengembangan model dilakukan, model (6.1) dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y), \end{aligned} \tag{6.20}$$

dimana

$$F(x, y) = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \alpha xy, \text{ dan}$$

$$G(x, y) = sy \left(1 - \frac{y}{L} \right) - \beta xy.$$

Dengan pertimbangan bahwa kedua populasi yang ditinjau bernilai ekonomi, maka kedua populasi selanjutnya dipanen dengan laju pemanenan $h(t) = q_i E_i z(t)$, dimana q_i menyatakan koefisien ketertangkapan, E_i menyatakan usaha

penangkapan, dan $z(t)$ menyatakan ukuran populasi pada waktu t . Pada bagian ini akan ditinjau bahwa kedua populasi dipanen dengan laju pemanenan bergantung pada waktu penangkapan t . Dengan pertimbangan itu, model (6.20) dikembangkan menjadi model dengan pemanenan yang dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) - h_x(t) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) - h_y(t).\end{aligned}\tag{6.21}$$

Fungsi pemanenan $h_x(t)$ dan $h_y(t)$ menyatakan laju pemanenan untuk populasi x dan y pada waktu pemanenan t .

Keseimbangan bionomik adalah suatu konsep yang menyatukan keseimbangan biologi dan keseimbangan ekonomi. Seperti yang telah dibahas pada bagian sebelumnya, titik keseimbangan biologi diperoleh dengan menyelesaikan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ secara simultan. Keseimbangan ekonomi dikatakan tercapai jika pendapatan total dari penjualan biomassa yang dipanen sama dengan biaya total untuk usaha yang digunakan dalam pemanenan.

Misalkan

c_x = biaya pemanenan per unit usaha untuk populasi x

c_y = biaya pemanenan per unit usaha untuk populasi y

p_x = harga per unit biomassa untuk populasi x

p_y = harga per unit biomassa untuk populasi y .

6.4.1 Kebijakan pemanenan optimal

Objektif kita adalah memaksimalkan fungsi nilai sekarang (*present value*) J dari fungsi keuntungan yang diberikan oleh

$$J\{h_x, h_y\} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \{(p_x - c_x(x))h_x(t) + (p_y - c_y(y))h_y(t)\} dt. \quad (6.22)$$

Fungsi nilai sekarang J dimaksimalkan dengan menggunakan prinsip maksimal Pontryagin (Pontryagin, et.al, 1963) dengan kendala persamaan (6.21). Konstanta δ menyatakan laju diskon tahunan. Variabel-variabel kontrol $h_x(t)$ dan $h_y(t)$ memenuhi kendala

$$0 \leq h_x(t) \leq (h_x)_{maks} \quad \text{dan} \quad 0 \leq h_y(t) \leq (h_y)_{maks}. \quad (6.23)$$

Persamaan Hamilton untuk persoalan yang merujuk pada persamaan (6.22) diberikan oleh

$$H = e^{-\delta t} \{(p_x - c_x(x))h_x(t) + (p_y - c_y(y))h_y(t)\} + \lambda_x (rx - bx^2 - \alpha xy - h_x(t)) + \lambda_y (sy - ey^2 - \beta xy - h_y(t)), \quad (6.24)$$

dimana $\lambda_x(t)$ dan $\lambda_y(t)$ adalah variabel-variabel adjoin.

Variabel-variabel kontrol h_x dan h_y linear dalam persamaan Hamilton H . Selanjutnya, syarat perlu untuk menjadi

optimal bagi variabel-variabel kontrol adalah $\frac{\partial H}{\partial h_x} = 0$ dan

$\frac{\partial H}{\partial h_y} = 0$. Dari persamaan Hamilton, persamaan (6.24), diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial h_x} = e^{-\alpha}(p_x - c_x(x)) - \lambda_x = 0 \text{ dan}$$

$$\frac{\partial H}{\partial h_y} = e^{-\alpha}(p_y - c_y(y)) - \lambda_y = 0.$$

Selanjutnya dengan itu diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda_x &= e^{-\alpha}[p_x - c_x(x)] \\ \lambda_y &= e^{-\alpha}[p_y - c_y(y)]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Sekali lagi, dari persamaan Hamilton diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -e^{-\alpha}c'_x(x)h_x + \lambda_x F_x + \lambda_y G_x \text{ dan}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -e^{-\alpha}c'_y(y)h_y + \lambda_y G_y + \lambda_x F_y.$$

Selanjutnya dengan memperhatikan syarat $\dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}$ dan

$\dot{\lambda}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}$, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = e^{-\alpha}c'_x(x)h_x - \lambda_x F_x - \lambda_y G_x \\ \frac{d\lambda_y}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = e^{-\alpha}c'_y(y)h_y - \lambda_y G_y - \lambda_x F_y. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Dengan mendifferensialkan persamaan (6.25) terhadap t , kemudian menyamakannya dengan persamaan (6.26), dan setelah disederhanakan diperoleh

$$\begin{aligned} [p_x - c_x(x)]F_x + [p_y - c_y(y)]G_x - c'_x(x)F(x, y) &= \delta [p_x - c_x(x)] \\ [p_x - c_x(x)]F_y + [p_y - c_y(y)]G_y - c'_y(y)G(x, y) &= \delta [p_y - c_y(y)]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Secara khusus persamaan (6.27) menghasilkan solusi keseimbangan optimal $x = x^*$ dan $y = y^*$.

Merujuk pada Clark (1990), kita pertimbangkan ekspresi

$$R(x, y) = [p_x - c_x(x)]F(x, y) + [p_y - c_y(y)]G(x, y) \quad (6.28)$$

untuk fungsi keuntungan yang berkelanjutan (*sustainable economic rent*). Perlu dicatat bahwa keuntungan yang berkelanjutan mengakibatkan $h_x(t) = F(x, y)$ dan $h_y(t) = G(x, y)$. Dengan mendifferensialkan secara parsial persamaan (6.28), maka persamaan (6.27) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \delta [p_x - c_x(x)] \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= \delta [p_y - c_y(y)]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Untuk kasus $\delta = 0$, maka persamaan (6.29) tereduksi menjadi syarat untuk mendapatkan keuntungan maksimal (*maximum sustained rent*), yaitu $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0$.

Selanjutnya didefinisikan

$$\begin{aligned}
 z(x) &= \int_{x_0}^x [p_x - c_x(\xi)] d\xi \\
 w(y) &= \int_{y_0}^y [p_y - c_y(\eta)] d\eta,
 \end{aligned}
 \tag{6.30}$$

dimana $x_0 = x(0)$ dan $y_0 = y(0)$. Misalkan juga

$$R_s(x, y) = R(x, y) - \delta\{z(x) + w(y)\}. \tag{6.31}$$

Dengan demikian persamaan (6.29) menyatakan syarat perlu untuk memaksimalkan fungsi $R_s(x, y)$.

6.4.2 Pendekatan lintasan optimal

Dengan menggantikan h_x dengan $F(x, y) - \dot{x}$ dan h_y dengan $G(x, y) - \dot{y}$, persamaan objektif (6.22) dapat dituliskan sebagai

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \{ (p_x - c_x(x))(F(x, y) - \dot{x}) + (p_y - c_y(y))(G(x, y) - \dot{y}) \} dt.
 \tag{6.32}$$

Dari persamaan (6.30) diperoleh $\dot{z} = [p_x - c_x(x)] \dot{x}$ dan $\dot{w} = [p_y - c_y(y)] \dot{y}$, dan dengan itu diperoleh

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \{ (p_x - c_x(x))F(x, y) - \dot{z} + (p_y - c_y(y))G(x, y) - \dot{w} \} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \{ (p_x - c_x(x))F(x, y) + (p_y - c_y(y))G(x, y) \} dt \\
 &\quad - \int_0^{\infty} e^{-\delta t} (\dot{z} + \dot{w}) dt.
 \end{aligned}$$

Dengan mengintegrasikan suku kedua dari fungsi objektif di atas dan dengan memperhatikan batas integral serta nilai fungsi $z(x)$ dan $w(x)$ pada saat $t = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \{ (p_x - c_x(x))F(x, y) + (p_y - c_y(y))G(x, y) \\
 &\quad - \delta(z(x) + w(x)) \} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} R_s[x(t), y(t)] dt.
 \end{aligned}
 \tag{6.33}$$

Dengan transformasi ini, jelas bahwa persamaan (6.29) menentukan solusi keseimbangan optimal (x^*, y^*) . Begitu posisi (x^*, y^*) dicapai, maka jelas bahwa posisi tersebut tetap dipertahankan untuk selamanya, karena fungsi integran pada (6.33) bernilai maksimal pada titik tersebut.

Selanjutnya akan ditentukan lintasan optimal dari posisi awal (x_0, y_0) ke titik (x^*, y^*) . Masalahnya sekarang adalah bagaimana menentukan fungsi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang memenuhi kendala pada $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ serta kendala pada (6.23) sehingga lintasan yang bersesuaian pada permukaan objektif semaksimal mungkin untuk setiap waktu t .

Persoalan ini dapat diselesaikan jika suatu lintasan $(x^*(t), y^*(t))$ dengan sifat $R_s(x^*(t), y^*(t)) \geq R_s(x(t), y(t))$ untuk setiap lintasan $(x(t), y(t))$ yang layak dapat ditentukan. Jelas bahwa tujuannya adalah menentukan suatu lintasan $(x(t), y(t))$ yang bergerak paling cepat menuju ke titik $(x^*(t), y^*(t))$. Syarat pada pertidaksamaan (6.23) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
 F(x, y) - (h_x)_{maks} &\leq \dot{x} \leq F(x, y) \\
 G(x, y) - (h_y)_{maks} &\leq \dot{y} \leq G(x, y).
 \end{aligned}
 \tag{6.34}$$

Tujuan kita sekarang adalah menentukan pada setiap titik (x, y) suatu vektor kecepatan $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ yang memenuhi syarat (6.34) sedemikian sehingga fungsi $R_s(x(t), y(t))$ naik secepat mungkin. Dari fungsi $R_s(x(t), y(t))$ diperoleh $\frac{dR_s}{dt} = \frac{\partial R_s}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial R_s}{\partial y} \frac{dy}{dt}$. Untuk memaksimalkan fungsi ini, haruslah memenuhi

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} F(x, y) - (h_x)_{maks}, & \text{jika } \frac{\partial R_s}{\partial x} < 0 \\ F(x, y), & \text{jika } \frac{\partial R_s}{\partial x} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} G(x, y) - (h_y)_{maks}, & \text{jika } \frac{\partial R_s}{\partial y} < 0 \\ G(x, y), & \text{jika } \frac{\partial R_s}{\partial y} > 0. \end{cases}$$

Dengan mempertimbangkan kurva $\frac{\partial R_s}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial R_s}{\partial y} = 0$ pada bidang x - y , diperoleh bahwa kedua kurva tersebut berpotongan pada titik keseimbangan optimal (x^*, y^*) .

Contoh 6.6 Misalkan nilai parameter untuk masalah di atas adalah $r = 0,7$, $s = 0,8$, $e = 0,007$, $K = 200$, $L = 300$, $\alpha = 0,0001$, $\beta = 0,0001$, $c_1 = 0,2$, $c_2 = 0,3$, $p_s = 0,6$, dan

$p_y = 0,5$. Merujuk pada Clark (1990), digunakan fungsi $c_x = \frac{c_1}{x}$

dan $c_y = \frac{c_2}{y}$, dan dengan itu diperoleh

$$R(x, y) = \left(0,6 - \frac{0,2}{x}\right) \left[0,7 x \left(1 - \frac{x}{200}\right) - 0,0001 xy\right] \\ + \left(0,5 - \frac{0,3}{y}\right) \left[0,8 y \left(1 - \frac{y}{300}\right) - 0,0001 xy\right].$$

Dengan mengambil $x_0 = 0,1$ dan $y_0 = 0,1$, diperoleh

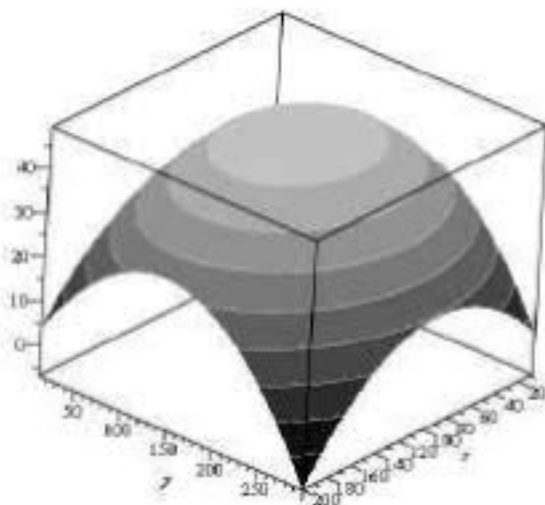
$$R_s(x, y) = \left(0,6 - \frac{0,2}{x}\right) \left[0,7 x \left(1 - \frac{x}{200}\right) - 0,0001 xy\right] + \left(0,5 - \frac{0,3}{y}\right) \\ \left[0,8 y \left(1 - \frac{y}{300}\right) - 0,0001 xy\right] - (0,0006 x - 0,00011) - \\ (-0,0002 \ln(10 x) + 0,0005 y - 0,0003 \ln(10 y)).$$

Visualisasi fungsi permukaan $R_s(x, y)$ diberikan pada Gambar 6.12.

Dari $R_s(x, y)$ diperoleh

$$\frac{\partial R_s}{\partial x} = \frac{-0,00001(-20 - 42013x + 420x^2 + 11xy)}{x} \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial R_s}{\partial y} = -1,000 \cdot 10^{-13} \left\{ \frac{1,100 \cdot 10^9 xy - 4,0032 \cdot 10^{12} y - 3,000 \cdot 10^9}{y} \right. \\ \left. + \frac{2,6667 \cdot 10^{10} y^2}{y} \right\}.$$

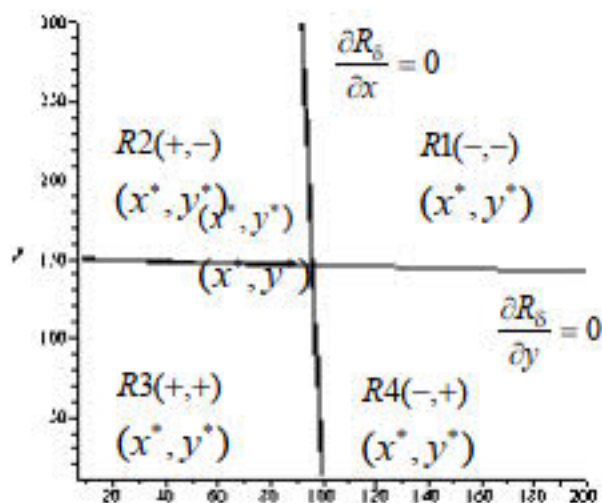


Gambar 6.12 Permukaan fungsi $R_s(x, y)$

Dengan mengambil $\frac{\partial R_s}{\partial x} = \frac{\partial R_s}{\partial y} = 0$ dan menyelesaikannya terhadap x dan y diperoleh $(x^*, y^*) = (96, 20365, 146, 15237)$. Plot untuk keadaan tersebut diberikan pada Gambar 6.13.

Tanda pada $R1$ sampai $R4$ menyatakan kemiringan lintasan $(x(t), y(t))$. Dengan itu, kontrol optimal $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ dinyatakan sebagai

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \begin{cases} (F - (h_x)_{maks}, G - (h_y)_{maks}) & \text{di R1} \\ (F, G - (h_y)_{maks}) & \text{di R2} \\ (F, G) & \text{di R3} \\ (F - (h_x)_{maks}, G) & \text{di R4.} \end{cases}$$

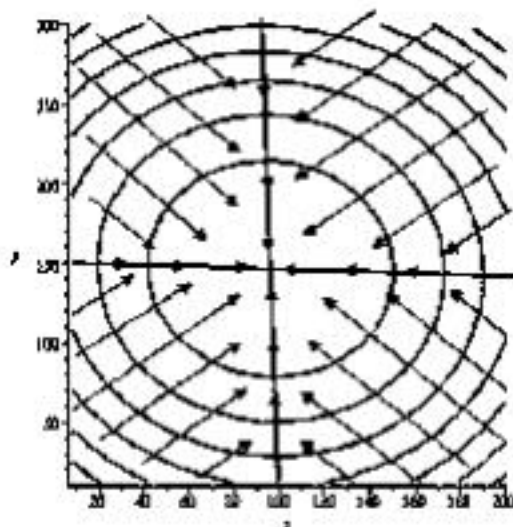


Gambar 6.13 Posisi titik optimal pada $R_0(x, y)$

Sketsa arah lintasan optimal menuju ke titik optimal diberikan pada Gambar 6.14.

Aturan arah lintasan optimal adalah lintasan mengikuti lintasan garis lurus dari posisi awal (x_0, y_0) yang diberikan sampai lintasan ini bertemu dengan kurva $\frac{\partial R_0}{\partial x} = 0$ atau kurva

$\frac{\partial R_0}{\partial x} = 0$. Selanjutnya lintasan tersebut mengikuti kurva $\frac{\partial R_0}{\partial x} = 0$ atau kurva $\frac{\partial R_0}{\partial x} = 0$ menuju ke titik optimal (x^*, y^*) .



Gambar 6.14 Sketsa arah lintasan optimal

Lintasan optimal yang dihasilkan merupakan suatu sketsa lintasan optimal $(x(t), y(t))$. Sketsa lintasan optimal ini bersesuaian dengan lintasan optimal dengan berpedoman pada syarat-syarat untuk memaksimalkan fungsi keuntungan (*economic rent*). Namun lintasan optimal untuk variabel-variabel adjoin dan variabel-variabel kontrol tidak ditunjukkan. Perlu dirancang suatu program untuk menggambarkan lintasan optimal dari variabel-variabel keadaan, variabel-variabel kontrol, dan variabel-variabel adjoin.

Untuk model kompetisi dengan pemanenan, titik keseimbangan bionomik dari model dihubungkan dengan kebijakan pemanenan optimal dengan memaksimalkan nilai sekarang dari fungsi keuntungan yang berdasarkan pada prinsip maksimal Pontryagin dengan fungsi kendala yang melibatkan model kompetisi dua populasi dengan laju pemanenan bergantung pada waktu pemanenan. Dari analisis diperoleh suatu sketsa lintasan optimal yang memaksimalkan nilai sekarang dari fungsi keuntungan.

6.5 Soal latihan

1. Berikan interpretasi secara ekologi pada model (6.2) jika berlaku $er - cs > 0$ dan $bs - fr > 0$.
2. Berikan pula interpretasi secara ekologi pada model (6.2) jika berlaku $er - cs < 0$ dan $bs - fr < 0$.
3. Diberikan model interaksi dua populasi

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x + y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(2 - 2y + x).$$

Jelaskan perbedaan mendasar antara model tersebut dengan model model (6.1). Tentukan pula titik keseimbangan dan jenis kestabilan titik keseimbangan model tersebut.

4. Pertimbangkan model interaksi yang melibatkan tiga populasi berikut,

$$\frac{dx}{dt} = x(-\alpha + \beta y - az)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon - \gamma x - bz)$$

$$\frac{dz}{dt} = z(\delta + \mu\alpha - cy).$$

Asumsikan semua nilai parameter bernilai positif. Jelaskan peran masing-masing kompartemen pada model tersebut.

5. Tentukan semua titik keseimbangan model pada soal nomor 4 dan analisis juga kestabilannya dengan menggunakan metode pelinearan.

Daftar Pustaka

- Abdelkader, M. A. 1980. A general two-species competition model with time-varying rates. *Ecological Modelling*, 10:31-45.
- Agnew, T.T. 1979. Optimal exploitation of a fishery employing a non-linear harvesting function. *Ecological Modelling*, 6:47-57.
- Arrowsmith, D. K. and Place, C. M. 1982. *Ordinary differential equations*. London: Chapman and Hall.
- Ball, M. A. 1985. *Mathematics in the social and life Sciences: Theories, models, and methods*. New York: John Wiley & Sons.
- Barnes, B. and Fulford, G.R. 2002. *Mathematical modelling with case studies*. New York: Taylor & Francis Inc.
- Boyce, W.E. and DiPrima, R.C. 1992. *Elementary differential equations and boundary value problem*. 5th Ed. New York: John Wiley & Sons.
- Brauer, F. and Sanchez, D.A. 1975. Constant rate population harvesting: Equilibrium and stability. *Theoretical Population Biology*, 8:12-30.
- Brauer, F. and Soudack, A.C. 1979a. Stability regions and transition phenomena for harvested predator-prey systems. *Journal Math. Biology*, 7:319-337.

- Brauer, F. and Soudack, A.C. 1979b. Stability regions in predator-prey systems with constant-rate prey harvesting. *Journal Math. Biology*, 8:55-71.
- Brauer, F. and Soudack, A.C. 1981. Coexistence properties of some predator-prey systems under constant rate harvesting and stocking. *Journal Math. Biology*, 12:101-114.
- Burghes, D. N. and Borrie, M.S. 1981. *Modelling with differential equations*. Chichester, England: Ellis Horwood Limited.
- Burton, T.A. 1985. *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*. Orlando, Florida: Academic Press, INC.
- Clark, C.W. 1985. *Bioeconomic modelling and fisheries management*. New York: John Wiley & Sons.
- Clark, C.W. 1990. *Mathematical bioeconomics: The optimal management of renewable resources*. New York: John Wiley & Sons.
- Coddington, E.A. and Levinson, N. 1955. *Theory of ordinary differential equations*. New York: Mc Graw - Hill.
- Connell, J.H. 1983. On the prevalence and relative importance of interspecific competition. *American Naturalist*, 122(5):661-696.
- Conrad, J. M. and Clark, C. W. 1987. *Natural resources economics*. New York: Cambridge University Press.
- Danca, M., Codreanu, S., and Bako, B. 1997. Detailed analysis of a nonlinear prey-predator model. *Journal of Biological Physics*, 23:11-20.

- Dayong, Z. 1991. Exploitation competition and coexistence of two plant populations on a number of growth-limiting resources. *Ecological Modelling*, 53:263-279.
- Doucet, P. and Sloep, P.B. 1992. *Mathematical modeling in the life sciences*. New York: Ellis Horwood.
- Ebenhoh, W. 1994. Competition and coexistence: Modelling approaches. *Ecological Modelling*, 75/76:83-98.
- Edwards, C. H. and Penney, D. E. 1993. *Elementary differential equations with boundary value problems*. 3rd Ed. New Jersey: Prentice-Hall.
- Ekschmitt, K. and Breckling, B. 1994. Competition and coexistence: The contribution of modelling to the formation of ecological concepts. *Ecological Modelling*, 75/76:71-82.
- Giordano, F. R., Wier, M.D., and For, W.P. 2003. *A first course in mathematical modeling*. 3rd Ed. California: Brooks Cole.
- Gopalsamy, K. 1984. Delayed responses and stability in two-species systems. *J. Austral. Math. Soc, Ser. B* 25:473-500.
- Haberman, R. 1998. *Mathematical models: Mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow*. Philadelphia: SIAM.
- Ho, C.P. and Ou, Y.L. 2002. Influence of time delay on local stability for a predator-prey system. *Journal of Tunghai Science*, 4:47-62.
- Hogart, W.L., Norbury, J., and Sommers, K. 1992. Stability of a predator-prey model with harvesting. *Ecological Modelling*, 62:83-106.

- Holmberg, J. 1995. *Socio-ecological principles and indicators for sustainability*. PhD Thesis. Goteborg University, Sweden.
- Jeffries, C. 1974. Probabilistics limit cycles. In S Levin (Eds). *Lecture notes in biomathematics*. 2:123-131. New York: Springer-Verlag.
- Jeffries, C. 1989. *Mathematical modeling in ecology*. Boston: Birkhaauser.
- Kar, T.K. 2003. Selective harvesting in a prey-predator fishery with time delay. *Mathematical and Computer Modelling*, 38:449-458.
- Kar, T.K. and Chaudhuri, K.S. 2004. Harvesting in a two-prey one predator fishery: A bioeconomic model. *J. ANZIAM*, 45:443-456.
- Kot, M. 2001. *Elements of mathematical ecology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Luckinbill, L.S. 1973. Coexistence in laboratory populations of paramecium aurelia and its predator didinium nasutum. *Journal of Ecology*, 54(6):1320-1327.
- Martin, A. and Ruan, S. 2001. Predator-prey models with delay and prey harvested. *Journal of Math. Biol.* 43:247-267.
- May, R. M. 1974. *Stability and complexity of model ecosystems*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- McClanahan, T. R. 1995. Harvesting in an uncertain world: Impact of resource competition on harvesting dynamics. *Ecological Modelling*, 80:21-26.

- Messia, M. G., De Mottoni, P., and Santi, E. 1984. On a competitive system subject to switching predation. *Ecological Modelling*, 24:9-24.
- Odum, E.P. 1953. *Fundamentals of ecology*. Philadelphia-London: W. B. Saunders.
- Pielou, E. C. 1977. *Mathematical ecology*. New York: John Wiley & Sons.
- Pitcher, T.J. and Hart, P.J.B. 1982. *Fisheries ecology*. London: Croom Helm.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. S., Gamkrelidze, R. V., and Mishchenko, E. F. 1962. The mathematical theory of optimal processes. New York: John Wiley & Sons.
- Restrope, J.G. and Sanchez, C.M.V. 2012. *Parameter estimation of a predator-prey model using a genetic algorithm*. In <http://www-rohan.sdsu.edu/~jmahaffy/courses/f00/math122/labs/labj/q3v1.htm> (diakses pada 20 Februari 2012).
- Roughgaden, J. 1983. Competition and theory in community ecology. *American Naturalist*, 122(5): 583-601.
- Sanchez, D.A. 1968. *Ordinary differential equations and stability theory: An introduction*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.
- Schoener, T.W. 1983. Field experiments on interspecific competition. *American Naturalist*, 122(2):240-285.
- Srinivasu, P. D., Ismail, S., and Naidu, C.R. 2001. Global dynamics and controllability of a harvested prey-predator system. *J. Biological Systems*, 9(1):67-79.

- Turner, J. E. and Rapport, D. J. 1974. An economic model of population growth and competition in natural communities. In S. Levin (Eds.). *Lecture notes in biomathematics*. 2: 236-240. New York: Springer - Verlag.
- Wiley, C.R. 1979. *Differential equations* (International Student Edition). Kogakusha, Tokyo: McGraw-Hill.
- Willems, J.L. 1970. *Stability theory of dynamical systems*. London: Thomas Nelson & Sons.
- www.en.wikipedia.org/Wiki/Demographics_of_China. (diakses pada 7 Mei 2013).

Lampiran

Lampiran 1 Rata-rata Populasi Penduduk Republik Rakyat Cina

Tahun	Data rata-rata populasi RRC	$\ln(P/(K-P))$	Nilai Prediksi dengan model logistik	Kesalahan	Persentase Kesalahan
1950	546.815.000	-0,437	440.855.455	-105.959.545	-19,378
1951	557.480.000	-0,405	459.131.246	-98.348.754	-17,642
1952	568.910.000	-0,371	477.784.488	-91.125.512	-16,018
1953	581.390.000	-0,334	496.792.416	-84.597.584	-14,551
1954	595.310.000	-0,293	516.130.090	-79.179.910	-13,301
1955	608.655.000	-0,254	535.770.493	-72.884.507	-11,975
1956	621.465.000	-0,216	555.684.652	-65.780.348	-10,585
1957	637.405.000	-0,170	575.841.780	-61.563.220	-9,658
1958	653.235.000	-0,124	596.209.455	-57.025.545	-8,730
1959	666.005.000	-0,088	616.753.807	-49.251.193	-7,395
1960	667.070.000	-0,085	637.439.738	-29.630.262	-4,442

1961	660.330.000	-0,104	658.231.149	-2.098.851	-0,318
1962	665.770.000	-0,088	679.091.196	13.321.196	2,001
1963	682.335.000	-0,041	699.982.541	17.647.541	2,586
1964	698.355.000	0,005	720.867.620	22.512.620	3,224
1965	715.185.000	0,054	741.708.918	26.523.918	3,709
1966	735.400.000	0,112	762.469.231	27.069.231	3,681
1967	754.550.000	0,167	783.111.934	28.561.934	3,785
1968	774.510.000	0,225	803.601.237	29.091.237	3,756
1969	796.025.000	0,288	823.902.424	27.877.424	3,502
1970	818.315.000	0,353	843.982.087	25.667.087	3,137
1971	841.105.000	0,421	863.808.326	22.703.326	2,699
1972	862.030.000	0,485	883.350.943	21.320.943	2,473
1973	881.940.000	0,546	902.581.601	20.641.601	2,340
1974	900.350.000	0,603	921.473.963	21.123.963	2,346
1975	916.395.000	0,654	940.003.806	23.608.806	2,576
1976	930.685.000	0,700	958.149.103	27.464.103	2,951
1977	943.455.000	0,741	975.890.088	32.435.088	3,438
1978	956.165.000	0,783	993.209.284	37.044.284	3,874
1979	969.005.000	0,827	1.010.091.516	41.086.516	4,240

1980	981.235.000	0,868	1.026.523.897	45.288.897	4,615
1981	993.885.000	0,912	1.042.495.791	48.610.791	4,891
1982	1.008.065.000	0,963	1.057.998.758	49.933.758	4,953
1983	1.020.180.000	1,007	1.073.026.485	52.846.485	5,180
1984	1.034.750.000	1,061	1.087.574.696	52.824.696	5,105
1985	1.045.320.000	1,101	1.101.641.050	56.321.050	5,388
1986	1.066.790.000	1,185	1.115.225.039	48.435.039	4,540
1987	1.084.035.000	1,255	1.128.327.861	44.292.861	4,086
1988	1.101.630.000	1,330	1.140.952.302	39.322.302	3,569
1989	1.118.650.000	1,405	1.153.102.606	34.452.606	3,080
1990	1.135.185.000	1,482	1.164.784.345	29.599.345	2,607
1991	1.150.780.000	1,558	1.176.004.291	25.224.291	2,192
1992	1.164.970.000	1,631	1.186.770.288	21.800.288	1,871
1993	1.178.440.000	1,703	1.197.091.125	18.651.125	1,583
1994	1.191.835.000	1,779	1.206.976.413	15.141.413	1,270
1995	1.204.855.000	1,857	1.216.436.473	11.581.473	0,961
1996	1.217.550.000	1,937	1.225.482.220	7.932.220	0,651
1997	1.230.075.000	2,022	1.234.125.061	4.050.061	0,329
1998	1.241.935.000	2,107	1.242.376.794	441.794	0,036

1999	1.252.735.000	2,190	1.250.249.518	-2.485.482	-0,198
2000	1.262.645.000	2,271	1.257.755.548	-4.889.452	-0,387
2001	1.271.850.000	2,351	1.264.907.335	-6.942.665	-0,546
2002	1.280.400.000	2,431	1.271.717.401	-8.682.599	-0,678
2003	1.288.400.000	2,511	1.278.198.269	-10.201.731	-0,792
2004	1.296.075.000	2,593	1.284.362.408	-11.712.592	-0,904
2005	1.303.720.000	2,681	1.290.222.185	-13.497.815	-1,035
2006	1.311.020.000	2,772	1.295.789.816	-15.230.184	-1,162
2007	1.317.885.000	2,865	1.301.077.327	-16.807.673	-1,275
2008	1.324.655.000	2,964	1.306.096.525	-18.558.475	-1,401
2009	1.331.380.000	3,073	1.310.858.966	-20.521.034	-1,541
2010	1.337.825.000	3,188	1.315.375.928	-22.449.072	-1,678
2011	1.344.130.000	3,314	1.319.658.399	-24.471.601	-1,821
2012	1.353.821.000	3,543	1.323.717.053	-30.103.947	-2,224

Indeks

A

- adjoin178, 181, 182, 236,
239, 242, 251
- amensalisme.....19
- atraktor67, 162, 163, 185,
186, 187, 188, 189, 211,
212
- autonomus.....26, 29, 61, 77,
122, 123, 201

B

- bentuk kanonik ...45, 46, 47,
48, 52, 54
- bidang fase30, 193
- bionomik141, 142, 143,
149, 168, 169, 231, 232,
241, 252

C

- carrying capacity* ... 87, 109,
123, 202
- centre* 188

D

- daya dukung... 87, 109, 113,
123, 151, 152, 202
- deterministik 7, 119

E

- eksploitasi 110, 138
- eksklusif 216
- eksponensial... 9, 12, 34, 42,
58, 75, 76, 77, 78, 79, 81,
82, 83, 84

G

global5, 29, 88, 113, 118,
151, 154, 157, 206, 207

H

Hamilton177, 178, 235,
236, 242, 243

I

interspesifik199, 200

intraspesifik199, 200, 203

intrinsik80, 87, 110, 113,
123, 133, 153, 202, 218

isoklin ...128, 129, 134, 207,
208, 209

J

Jacobi63, 130, 131, 153,
154, 161, 162, 182, 183,
185, 193, 194, 203, 209,
210, 212, 218, 219, 221,
222, 225

K

kapasitas batas15

kestabilan Hurwitz66, 67,
68, 70, 162, 185

keuntungan... 115, 116, 117,
118, 119, 121, 134, 135,
137, 138, 139, 140, 141,
143, 146, 147, 148, 150,
164, 165, 166, 169, 170,
171, 172, 173, 174, 175,
176, 177, 181, 200, 231,
232, 233, 234, 235, 242,
244, 251, 252

komensalisme 19

kompartemen 19, 20, 24,
253

kompetisi 19, 20, 21, 22,
199, 200, 201, 202, 216,
217, 234, 240, 252

kontrol.. 150, 177, 178, 180,
182, 235, 236, 238, 242,
249, 251

konvergen. 28, 29, 104, 105,
114

kualitatif 3, 6, 45, 50, 54,
129, 190, 207

L

laju intrinsik 82

limit cycle 150, 151, 190

linear .14, 15, 16, 17, 26, 30,
34, 35, 42, 43, 45, 50, 52,
62, 63, 64, 65, 66, 69,
130, 178, 187, 197, 236,
242

linearisasi62, 69

lintasan.....26, 56, 181, 238,
245, 246, 249, 250, 251,
252

logistik13, 86, 87, 88, 89,
90, 92, 94, 95, 100, 107,
109, 110, 111, 113, 115,
119, 121, 122, 126, 133,
201, 202

lokal 5, 6, 65, 154, 207, 210,
215, 219

Lotka-Volterra 19, 149, 151,
201, 202

M

maksimal .12, 13, 14, 15, 83,
85, 87, 91, 106, 109, 113,
115, 116, 117, 118, 119,
121, 123, 134, 135, 137,
138, 140, 146, 147, 148,
150, 151, 152, 164, 165,
171, 175, 177, 179, 181,
182, 202, 226, 227, 228,

229, 230, 234, 235, 238,
240, 242, 244, 246, 252

Malthus . 8, 9, 10, 12, 77, 84

mangsa . 19, 20, 21, 22, 149,
150, 151, 152, 156, 157,
158, 159, 160, 161, 162,
163, 167, 169, 175, 176,
181, 189, 190, 196

manifold stabil 205

medan vektor.. 90, 125, 128,
129, 134, 213, 214, 217

minimal 6, 104, 172, 177

MSY..... 106, 109, 110, 116,
117, 119, 200, 229, 230

mutualisme..... 19, 21

N

nilai eigen35, 36, 38, 39, 40,
43, 45, 46, 47, 48, 50, 52,
54, 57, 64, 66, 69, 130,
131, 147, 154, 185, 189,
194, 195, 196, 209, 212,
214, 219

nilai sekarang177, 181, 235,
238, 239, 240, 242, 252

node.47, 50, 51, 55, 56, 123,
129, 130, 131, 133, 153,
156, 157, 161, 209, 210,
219, 220, 223, 224, 225

nonlinear .61, 63, 64, 65, 69,
70, 130, 187

O

optimal .122, 149, 150, 177,
178, 181, 200, 235, 236,
238, 239, 242, 243, 244,
245, 246, 247, 249, 250,
251, 252

orbit.....26

osilasi150

OSY.....200

P

pelana.....54, 123, 129, 130,
131, 133, 153, 156, 161,
164, 171, 185, 195, 196,
209, 210, 212, 214, 219,
220, 222

pemanenan.....78, 80, 82, 94,
98, 99, 103, 104, 105,
106, 109, 110, 115, 116,
118, 119, 120, 121, 122,

125, 126, 132, 133, 134,
135, 138, 139, 143, 146,
149, 150, 151, 160, 162,
163, 165, 166, 167, 168,
169, 172, 174, 175, 176,
177, 181, 182, 189, 190,
191, 197, 201, 217, 218,
219, 220, 221, 222, 223,
224, 225, 226, 227, 228,
229, 231, 233, 234, 235,
238, 239, 240, 241, 242,
252

pemangsa 19, 20, 21, 22,
149, 150, 151, 152, 153,
156, 157, 158, 159, 160,
162, 163, 166, 167, 169,
172, 174, 175, 176, 181,
182, 189, 190, 196

periodik..... 56, 190

polinomial karakteristik . 32,
40, 42

Pontryagin.... 177, 179, 182,
235, 238, 242, 252

prediksi. 5, 8, 11, 14, 15, 17,
18, 23

Q

quasi-asimptotik..... 28
268

R

rank47

S

semi-stabil.....127

simbiosis19, 21

solusi nol.....27

spesies...19, 71, 72, 84, 122,
199, 200, 202spiral ...56, 58, 59, 168, 188,
196stabil asimptotik .29, 43, 59,
67, 68, 88, 104, 113, 114,
115, 118, 123, 124, 129,
131, 133, 134, 138, 140,
151, 153, 154, 156, 161,
162, 164, 166, 168, 174,
175, 189, 190, 193, 194,
195, 201, 206, 207, 210,
211, 213, 215, 219, 220,
223, 224, 225, 226, 229,
233, 234, 235, 239

stokastik.....7

Ttrajektori. 25, 26, 27, 29, 42,
50, 54, 55, 56, 58, 59, 67,
96, 151, 162, 163, 185,
186, 187, 188, 189, 193,
195, 207, 211, 212, 213,
214, 215transformasi . 45, 46, 48, 50,
52, 246**V**

vektor eigen... 36, 38, 40, 45

Verhulst..... 12, 13, 87, 92

W

waktu tunda..... 18

Tentang Penulis



Prof. Dr. Syamsuddin Toaha, M.Sc. lahir di Kabupaten Soppeng, Provinsi Sulawesi Selatan, pada 14 Januari 1968. Penulis menyelesaikan program sarjananya pada Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin pada 1992. Penulis kemudian melanjutkan pendidikannya pada jenjang program Master dan Doktor dan memperoleh gelar M.Sc. dan Ph.D. dalam bidang Applied Mathematics pada 2001 dan 2007 dari Universiti Putra Malaysia, Selangor Darul Ehsan, Malaysia.

Penulis berkarier sebagai tenaga edukatif pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin sejak 1994. Penulis

aktif mengajar pada Jurusan Matematika dan Program Magister Matematika Universitas Hasanuddin. Minat kajian penulis umumnya berkaitan dengan pemodelan matematika dalam bentuk sistem dinamik yang dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial. Penulis aktif meneliti, mengikuti seminar dalam bidang matematika, baik pada tingkat Nasional maupun tingkat Internasional. Penulis sekarang tercatat sebagai anggota Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS).

Buku ini mengupas pemodelan dinamika populasi untuk satu populasi dan interaksi dua populasi. Dinamika perubahan populasi dalam suatu model matematika dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial. Model matematika dibahas secara analitik dan dengan metode pendekatan. Interpretasi solusi model diberikan untuk menjelaskan fenomena dinamika populasi dan untuk keperluan memprediksi populasi untuk masa yang akan datang.

Buku ini terdiri atas enam bab. Materinya mencakup konsep pemodelan matematika, sistem dinamik dan kestabilan sebagai suatu konsep dan metode, model satu populasi, model dua populasi, model mangsa pemangsa, dan model kompetisi populasi. Fokus pembahasan buku ini meliputi syarat kewujudan populasi seimbang dan kondisi kestabilannya. Hal ini bertujuan untuk menjamin suatu populasi tidak akan punah untuk waktu yang panjang.

Kondisi populasi yang seimbang dan stabil dihubungkan dengan persoalan manajemen sumber daya alam yang berkelanjutan. Untuk itu dinamika populasi, sebagai contoh populasi ikan, dihubungkan dengan persoalan tangkapan maksimal dan profit maksimal (termasuk keuntungan maksimal dari present value) dari usaha eksploitasi sumber daya alam yang dapat diperbaharui.

Buku ini mengintegrasikan pembahasan dinamika populasi dari aspek pemodelan matematika, aspek ekologi (biologi) dan aspek ekonomi. Populasi sebagai stok yang bermanfaat dikaji melalui pendekatan matematis untuk menjamin suatu populasi tetap wujud (survive) dan memberikan keuntungan maksimal secara berkelanjutan (sustainable).

ISBN 978-602-17541-8-4



9 786021 754184